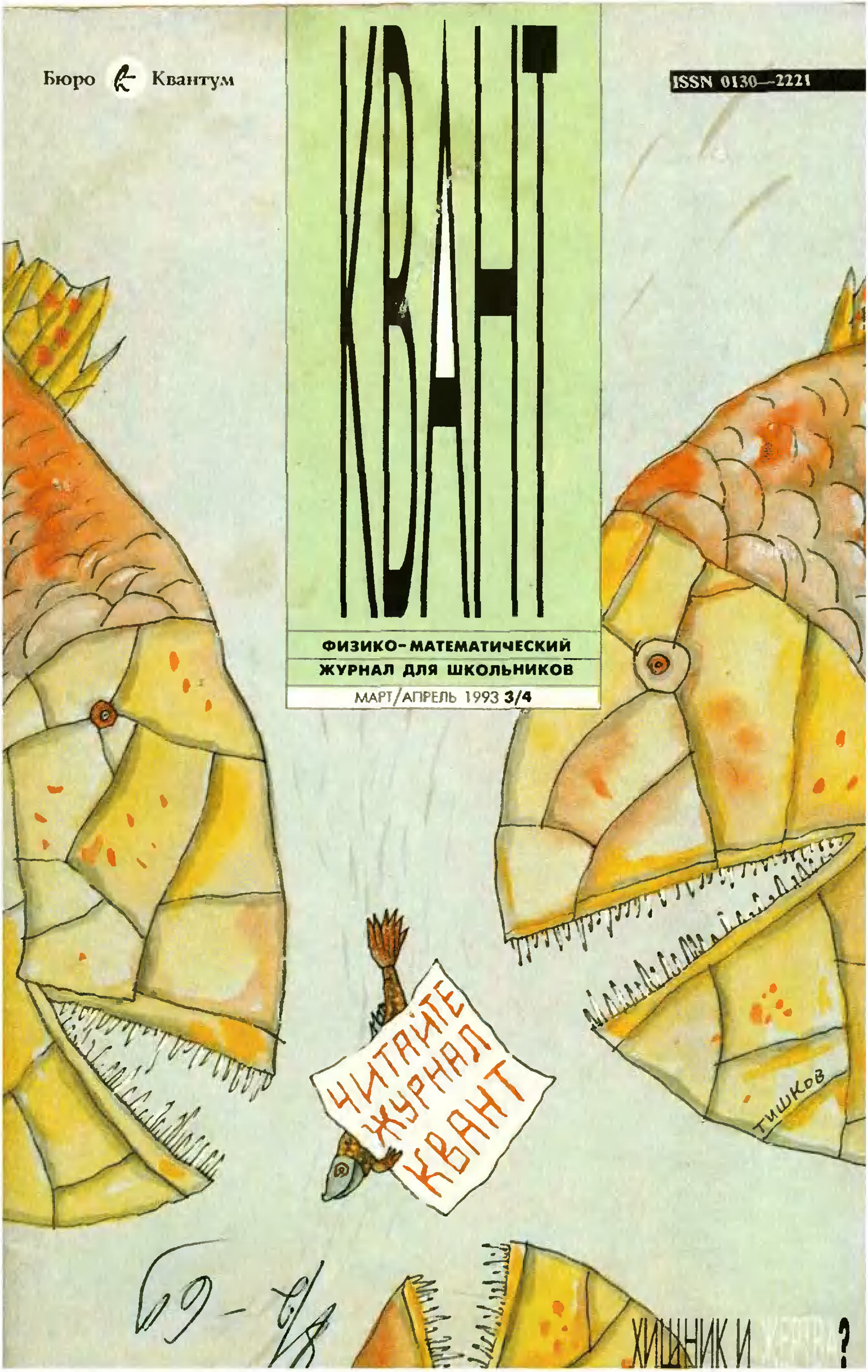
Бюро Квантум

ISSN 0130—2221

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

МАРТ/АПРЕЛЬ 1993 3/4



Проторенессанс. В истории искусства часто наиболее интересными бывают переходные периоды, например, когда на смену идеалистической трактовке реальности приходит ее чувственная реалистическая трактовка. Разумеется, эти превращения совершаются не в один день, и они связаны с целым комплексом проблем, связанных с историей, религией и т.д. Одним из таких переходных периодов был Проторенессанс, возникший в Италии в конце XIII - начале XIV веков. Это своего рода Предвозрождение, крупнейшим художником которого был Джотто. Неслучайно его прозвали «дедом новой европейской живописи», тогда как «отцами» станут уже художники самого Возрождения, как Раннего, так и Высокого.

Центральное место в творчестве Джотто занимает цикл фресок из жизни Христа и его предков. Он выполнен около 1305 г. в городе Падуе по заказу купца Скровеньи в капелле, известной более под названием капеллы дель Арена, поскольку она была выстроена на месте бывшего цирка. Перед вами одна из наиболее выразительных фресок этого цикла - она изображает ангела, сообщающего святой Анне чудесную весть о скором рождении у нее долгожданной дочери Марии, которую Бог позже изберет матерью Христа. Зритель видит дом, у которого как на сцене убрана четвертая стена и можно сразу же видеть и комнату, в окно которой влетает ангел, и террасу, где вертит свою прялку служанка. В одном пространстве представлены и чудо, и [illegible]ное, обыденное. Такое переосмысление в какой-то мере связано с идеями святого [illegible]ска Ассизского. Этот странствовавший по Италии в начале XIII века проповедник не [illegible]зывал себя «скоморохом Бога», неся в мир любовь в ее конкретном радостном [illegible] то «братья цветы» или «сестры ласточки». Для воплощения этих идей необходимо [illegible]старую иррациональность, идеальность византийской системы как по [illegible]тву, так и по отношению к композиции. Джотто использовал театральные [illegible] в то время мистерий. На этой фреске как раз и изображен такой [illegible]. Но сами фигуры Джотто сильно перерабатывает, вводя [illegible]щного, построенного по законам прямой перспективы [illegible]зрелищности следующих поколений.

КВАНТ

Научно-популярный физико-математический журнал

Выходит с января 1970 года

Учредители – Президиум РАН, «Бюро Квантум»

Издатель — НПП «Бюро Квантум» РАН

СОДЕРЖАНИЕ

3 АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ/ **ВЛАДИМИР ТИХОМИРОВ**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ

13 ХИЩНИК И ЖЕРТВА? / **КОНСТАНТИН БОГДАНОВ**

ИНТЕРВЬЮ

20 *ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ* **СЕРГЕЕМ НИКОЛЬСКИМ**

ЗАДАЧНИК КВАНТА

23 ЗАДАЧИ М1386 – М1390, Ф1393 – Ф1397
РЕШЕНИЯ М1344, М1361-1365, Ф1373- Ф1377

ШКОЛА В КВАНТЕ

37 НЕОБЫКНОВЕННЫЕ АРИФМЕТИКИ/ **АНДРЕЙ ЕГОРОВ, АННА КОТОВА**

КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

43 ЗАДАЧИ, КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6 – 8»
ЗАДАЧИ НА ЗАСЫПКУ/ **ИГОРЬ АКУЛИЧ**
ЛОЖКА ДЕГТЮ В БОЧКЕ МЕДА/ **СВЕТЛАНА ТИХОМИРОВА**

ЛАБОРАТОРИЯ

53 ШАРИК С ДЫРКОЙ В СТРУЕ ПЫЛЕСОСА/ **СТАНИСЛАВ КУЗЬМИН**

КАЛЕЙДОСКОП

56 А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМЫ ВАМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ?

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

59 ЭКСТРЕМУМЫ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ/ **ГЕННАДИЙ КЕМБРОВСКИЙ**

ВАРИАНТЫ

63 ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

76 ПЕРВЫЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА

ОЛИМПИАДЫ

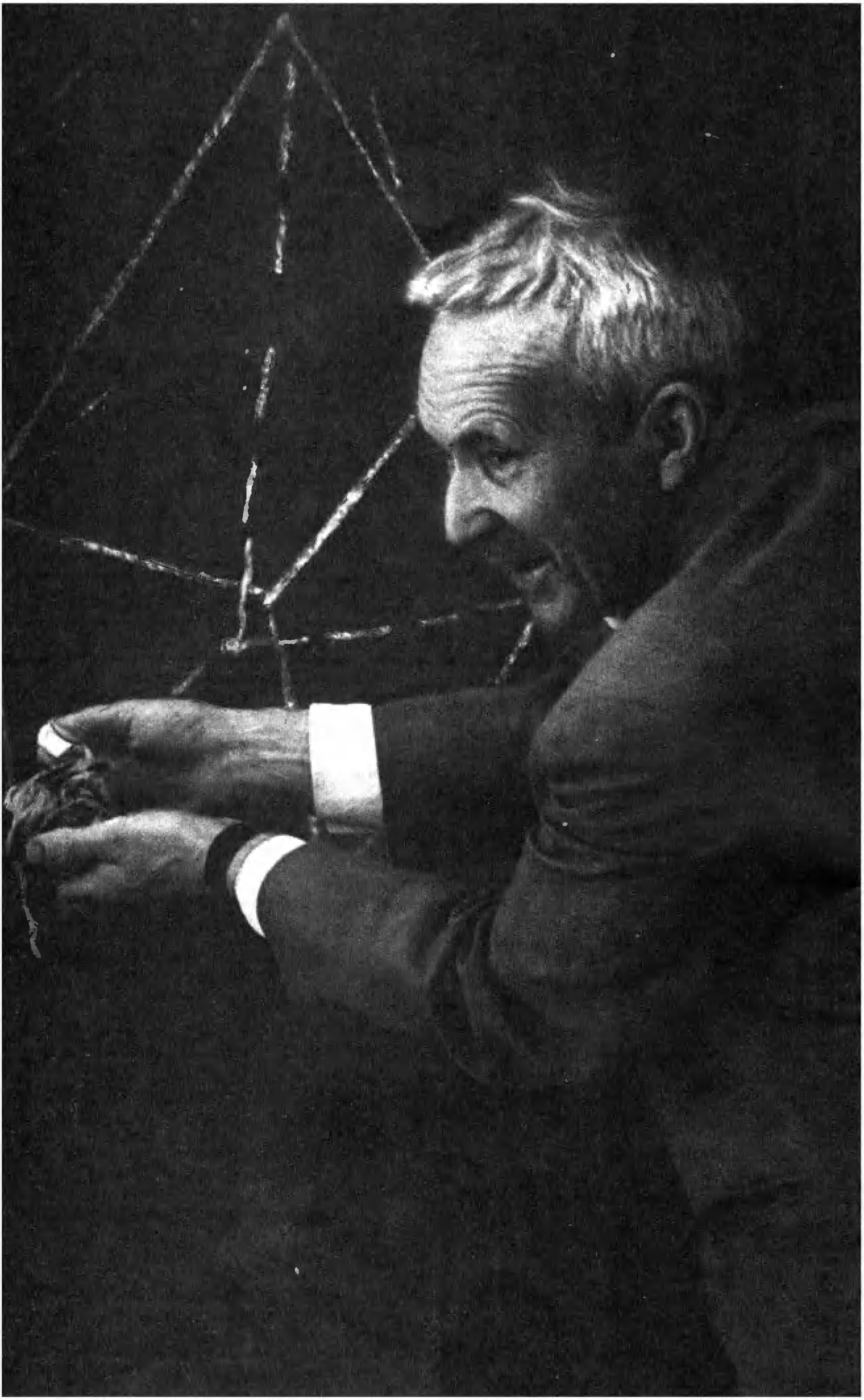
78 XXXIII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
II МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА "ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН"

83 ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ШАХМАТНАЯ СТРАНИЧКА

III КОРОЛЬ В КЛЕТКЕ

На I странице обложки — графика *Леонида Тишкова*



Андрей Николаевич Колмогоров

Владимир Тихомиров

25 апреля 1993 года исполнилось девяносто лет со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова — одного из величайших математиков нашего века и одного из крупнейших ученых в истории русской науки.

Творческая жизнь Андрея Николаевича длилась шестьдесят шесть лет. Впервые он выступил перед математической аудиторией с научным докладом в январе 1921 года. Последние строки, предназначенные для печати, были продиктованы им незадолго до смерти, наступившей 20 октября 1987 года.

В этой статье, посвященной А.Н. Колмогорову и обращенной к юным читателям, мне особенно хочется отметить одну особенность творческой биографии Андрея Николаевича. Он был не только гениальным Ученым, но и великим Просветителем, человеком, несущим свет — свет знаний и нравственного примера. Делу просвещения, делу школьного образования, воспитанию юношества он целиком посвятил треть своей творческой жизни.

Воистину 1965-й год, когда истекли сорок четыре года его непрерывного исполинского труда во имя науки, оказался переломным в его судьбе. Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на список его публикаций в том рубежном году. Тогда в журнале «Проблемы передачи информации» появилась его замечательная работа «Три подхода к определению понятия «количество информации». Она оказалась фактически последним из его крупных математических исследований. Там он впервые ввел понятие, получившее впоследствии название «колмогоровской сложности», с помощью которого пытался вскрыть сущность таких основоположных явлений, как «порядок» и «хаос». Эта работа венчает все его творчество, связывая в единый узел все его научные устремления. До нее Андрей Николаевич опубликовал свыше двухсот научных работ, после — не больше десяти, и все они посвящены старым темам.

В том же 1965-м году выходят его первые труды о проблемах школьного образования, и в частности фундаментальная статья «Объем знаний по математике для восьмилетней школы» (опубликованная в журнале «Математика в школе»), обозначающая новый этап в развитии школьного математического просвещения. Вся дальнейшая жизнь

Андрея Николаевича безраздельно отдана этому делу. За двадцать два года он опубликовал свыше ста статей на эти темы. Им была основана физико-математическая школа при Московском университете — знаменитый «колмогоровский интернат»; он был среди основателей журнала «Квант»; комиссия, председателем которой он был, разработала новые программы по математике; он возглавлял жюри многих олимпиад — московских, всероссийских, всесоюзных; он организовал летние школы, читал огромное число лекций для школьников и учителей, писал учебники и учебные пособия... Словом, оставшиеся двадцать два года Андрей Николаевич целиком посвятил вашим родителям, вам, мои дорогие читатели, и тем, кто будет учиться в школе после вас. Мне хочется немного рассказать вам об этой замечательной жизни.

Детство

В первые минуты жизни Андрея Николаевича случилась трагедия — его мать Мария Яковлевна Колмогорова умерла при рождении сына. Заботу о маленьком мальчике взяла на себя ее сестра — Вера Яковлевна. Она усыновила ребенка и посвятила ему всю свою жизнь до последней минуты. И Андрей Николаевич отвечал своей «тетушке» (как он звал ее) глубокой любовью.

Все, кто знал Андрея Николаевича, воспринимали его как необыкновенную, неповторимую и удивительно привлекательную личность. Во многом это было предопределено радостной и светлой атмосферой, окружавшей его в детстве и юности. Первые годы Андрей Николаевич провел в имении деда под Ярославлем. Вера Яковлевна с самых ранних пор старалась развить в ребенке любознательность, любовь к природе, наукам и чтению книг. Во время ежедневных прогулок она рассказывала мальчику о деревьях и цветах, травах и камнях, птицах и животных. Вечерами она показывала ему звездное небо, говорила о Мироздании. Когда мальчику исполнилось пять лет, Вера Яковлевна организовала домашнюю школу. В этой школе издавался журнал «Весенние ласточки». Андрею был поручен математический отдел. «Радость математического «открытия» я познал рано, — писал впоследствии Андрей Николаевич, — подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность: $1 = 1$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ и так далее.» Это открытие маленький Андрей поместил в «Весенних ласточках». Там же он публиковал придуманные им задачи. Одну из них я хочу предложить вашему вниманию.

Задача 1. Сколькими способами можно пришить пуговицу?

Эта задача требует небольшого комментария. Вера Яковлевна приучала ребенка к труду: мальчик участвовал в «заготовке дров» на зиму, собирая сучки в саду (число комнат в доме было что-то около двадцати, так что можно оценить, сколько возов дров требовалось для отопления и какую их долю составляли несколько кучек, собранных трех-четырехлетним мальчиком, но дело в принципе), поливал цветы, полол грядки, сам должен был пришивать себе пуговицы. Так что задача 1 происходила «из практики». «Считалось обязательным, — говорил мне Андрей Николаевич, поясняя постановку задачи, — чтобы ни одна дырочка не оставалась свободной.» Самому Андрею Николаевичу, по его словам, особенно нравились два способа — «из двух параллельных черточек и крестиком». А сколько способов существует всего, — в этом и состоит задача.

Гимназия

Когда мальчику исполнилось семь лет, Вера Яковлевна переехала с ним в Москву. Она определила его в приготовительный класс гимназии Репман. Эта во многом необычная гимназия была организована двумя замечательными женщинами — Евгенией Альбертовной Репман и Верой Федоровной Федоровой. В ней, в частности, не было процентной нормы для инородцев, мальчики и девочки учились вместе (так было, кажется, лишь в двух московских гимназиях; в гимназии Андрей Николаевич познакомился с Аней Егоровой, ставшей впоследствии его женой). И организация занятий была в той гимназии своеобразной. Там не ставили текущих оценок, а если кто-то проявлял повышенный интерес к предмету, он мог заниматься этим предметом со старшеклассниками. В гимназии работали первоклассные учителя. Преподавательница французского языка, много жившая в Париже, вела с учащимися философские и этические беседы на французском языке, учила их художественному переводу, знакомила с произведениями классической и современной французской литературы. Она привила Андрею Николаевичу любовь к Франции, ее духу и культуре, и эта любовь сопутствовала ему всю его жизнь. И математику преподавали замечательные, творчески мыслящие педагоги. Вот одна из задач, которую маленький Андрей получил от своих учителей.

Задача 2. Какой многоугольник получится, если рассечь куб плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно главной диагонали?

В наших беседах с Андреем Николаевичем неоднократно речь заходила об одаренности, в частности, о математической. В своей брошюре «О профессии математика», обращенной к юношеству, Андрей Николаевич выделил три группы специфической математической одаренности — алгоритмическую, геометрическую и логическую. Про себя он любил говорить, что многие его открытия были вызваны к жизни неожиданно возникшей геометрической картинкой. Он считал, что способность к образному геометрическому мышлению можно и нужно тренировать на задачах, подобных задаче 2. (Смешно думать про Андрея Николаевича, что геометрическая одаренность превалировала в нем: он был среди крупнейших аналитиков и логиков своего времени, но своей геометрической интуицией он особенно гордился.)

Завершая тему гимназии, необходимо сказать, что Андрей Николаевич на всю жизнь сохранил самые теплые чувства к своим товарищам, педагогам и атмосфере творчества и свободы, которая окружала его в гимназии Репман.

Университет

В 1920 году Колмогоров поступает в Московский университет.

Двадцатые годы были счастливой порой для московской математики. В начале десятых годов в Московском университете работал лишь один ученый, имевший международное признание — Дмитрий Федорович Егоров. А в тридцатые годы московская математическая школа безо всякой натяжки стала самой сильной в мире. Когда одного известного американского ученого в середине тридцатых годов попросили назвать четверку виднейших молодых математиков того времени, он назвал имена Гельфонда, Колмогорова, Понтрягина и Шнирельмана — московских математиков. А помимо этой четверки в Москве работали и П. Александров, и Бари, и Лаврентьев, и Люстерник, и Меньшов, и Хинчин, — все крупнейшие имена! Как же это получилось? На этот вопрос нельзя ответить одним словом, но одну из важнейших причин можно назвать сразу. Этой причиной был Лузин, их общий учитель!

Николай Николаевич Лузин, ученик Дмитрия Федоровича Егорова, — один из крупнейших русских математиков того времени — создал, быть может, самую великую в истории математики научную школу. Это произошло во многом благодаря тому, что он стал применять совершенно новый подход в работе с молодежью. Андрей Николаевич Колмогоров писал об этом так: «Существенным в этом подходе было вполне индивидуальное личное руководство, а также умение придавать избранной тематике особенную значимость».

Первый успех

В тот момент, когда А.Н. Колмогоров поступил в Московский университет, вокруг

Лузина сгруппировался большой коллектив выдающихся математиков (в основном я перечислил его выше). Они называли себя «Лузитанией». Осенью 1920 года Лузин читал курс комплексного переменного. На его лекциях собиралась почти вся Лузитания. Слушал их и юный А.Н. Колмогоров. О своем первом вступлении в научное сообщество Андрей Николаевич вспоминал: «С курсом Лузина связано мое первое достижение, после которого на меня было обращено некоторое внимание. Николай Николаевич любил импровизировать на лекциях. На лекции, посвященной доказательству теоремы Коши (основной теоремы курса), ему пришло в голову использовать такую лемму. Пусть квадрат разделен на конечное число квадратов. Тогда для любой константы C найдется такое число C', что для всякой кривой длины не больше C сумма периметров задевающих кривую квадратов не превосходит C'. Через две недели я обратился к председателю студенческого математического кружка... с небольшой рукописью, где это утверждение было опровергнуто». Рукопись, о которой говорит Андрей Николаевич, сохранилась (она датирована 4.01.1921 г.); она была опубликована в третьем томе собрания сочинений Колмогорова, вышедшем в год его смерти.

На докладе Колмогорова, послужившем отправной точкой его творческой математической биографии, присутствовали многие члены Лузитании, в частности, один из самых ярких ее представителей — Павел Самуилович Урысон (ему суждено будет трагически погибнуть спустя три года в бурных водах у берегов Бретани). Во время доклада Урысон отозвался такой репликой по поводу выступления Андрея Николаевича: «Молодец, чисто делает!» Вскоре Урысон предложил Колмогорову стать его учеником (у Лузина было в ту пору очень много учеников, и новых он брал с большим выбором).

Но затем Колмогоров сделал свое первое открытие в области тригонометрических рядов, об этом было доложено Лузину, и тот, повстречавшись как-то с Андреем Николаевичем на университетской лестнице, «с некоторой торжественностью» предложил ему стать его учеником. Так начался новый этап в жизни А.Н. Колмогорова.

А теперь пришло время сформулировать в виде задачи основную лемму, с помощью которой юный Колмогоров опроверг утверждение Лузина.

Задача 3. Докажите, что для любого сколь угодно большого числа K можно построить такую систему непересекающихся квадратов (внутри единичного квадрата), что каждый из них имеет общие точки с диагональю квадрата, а сумма их периметров больше K.

Первое математическое достижение, которое привело Колмогорова в ряды Лузитании, было еще сравнительно простым. Однако и в нем Андрею Николаевичу пришлось преодолеть несколько подводных камней. В частности, ему пришлось воспользоваться следующим результатом.

Задача 4. Пусть (a_n) $(n > 0)$ — последовательность, сходящаяся к нулю. Тогда найдется выпуклая последовательность (b_n), также стремящаяся к нулю и такая, что $b_n > |a_n|$ для всех n.

(Последовательность (b_n) называется выпуклой, если $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n \geq 0$ для всех $n \geq 1$.)

Летом 1922 года Андрей Николаевич

получает действительно выдающийся результат — он строит почти всюду расходящийся ряд Фурье суммируемой функции. Эта работа приносит ему всемирную известность. Именно с той поры — с лета 1922 года — разумно исчислять начало его необыкновенной по интенсивности и плодотворности творческой биографии.

Особенность творческой манеры

Здесь уместно сказать об одной особенности творчества А.Н. Колмогорова. Как-то Израиль Моисеевич Гельфанд, один из самых крупных математиков современности (и ученик А.Н. Колмогорова), сказал: «Математика — это марафон». Я думаю, вот что он вкладывал в эту фразу. Подавляющее большинство математиков годы и годы, а иногда и десятилетия тратят на развитие одного математического сюжета, создание некоей теории или решение какой-то отдельной задачи. Нередко на это уходит вся жизнь — большинство математиков «специализируются» лишь в одной какой-то области. Самые крупные меняют темы своих занятий два, три раза, величайшие, как Гильберт — чуть больше (у Гильберта было восемь «сюжетов»).

Пример Гильберта особенно показателен. Он долгие годы тратил на развитие некоей одной определенной идеи, теории или на решение отдельной задачи. При этом он не занимался ничем иным, а переключившись, никогда не возвращался к старым идеям. Каждый период занимал четыре, пять, восемь, десять и больше лет!

Творческая манера Андрея Николаевича была совершенно иной. Он умел концентрировать огромную энергию на сравнительно коротком («неделю, иногда, может быть, две — не больше») отрезке времени. Вспоминая об открытии всюду расходящегося ряда Фурье, Колмогоров писал: «Последним этапом была неделя (мне он говорил — три дня) непрерывных размышлений, закончившаяся возникшей внезапно конструкцией. Немного позднее без больших усилий возник аналитический вариант первоначальной чисто геометрической (вспомним рассуждения Андрея Николаевича о типах одаренности) идеи».

Так бывало у него и во всех остальных случаях, когда несколько дней беспрерывного размышления и полной сосредоточенности завершались внезапным озарением. Подобная аккумуляция энергии порождала мощный взрыв, в неприступных бастионах образовывалась брешь, туда мгновенно устремлялись десятки и даже сотни последователей, а сам Андрей Николаевич обычно не очень всем этим интересовался — его манили иные цели.

Вехи творческого пути

Нет никакой возможности в этой статье затронуть хоть сколько-нибудь полно основные достижения А.Н. Колмогорова в математике. И совершенно не потому, что большинство его результатов невозможно объяснить школьнику. Как раз наоборот: ясность и общезначимость целей, которые ставил перед собой Андрей Николаевич, таковы, что фактически все, что им было сделано, возможно объяснить любому непосвященному, но заинтересованному человеку. Но сам вклад Андрея Николаевича огромен. Одно лишь перечисление математических разделов («сюжетов»), в которые Колмогоров внес фундаментальный вклад, необычайно велико. Назовем некоторые: метрическая теория функций, дескриптивная теория множеств, математическая логика, теория вероятностей, геометрия, случайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теория приближений, теоретико-множественная топология, алгебраическая топология, дифференциальные уравнения, теория турбулентности, теория стрельбы, теория алгоритмов и автоматов, динамические системы, классическая механика, теория суперпозиций функций, теория информации, алгоритмическая теория вероятностей.

Существенную долю в его научных исследованиях составляют работы в области приложений к физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии и т.п. И помимо всего этого Андрей Николаевич имел труды по вопросам педагогики, методики, стиховедения, философии, истории, естествознания, написал множество статей в различные энциклопедии.

Всего список трудов А.Н. Колмогорова (пока еще неполный) насчитывает около 500 работ. Так что обо всем не скажешь. Поговорим лишь о самом важном.

Начнем с его работ по классической механике. Может ли Солнечная система существовать вечно? Безусловно, это — центральный вопрос всей астрономии. Ведь мыслимо, что почти всегда (как говорят математики, на множестве полной меры) эволюция любой планетной системы завершается катастрофой. В работах Андрея Николаевича эта проблема была решена для многих «невырожденных» задач астрономии. Колмогоров разработал новый метод, позволивший сдвинуть с мертвой точки проблему, которая стояла со времен Ньютона и Лапласа. Метод Колмогорова был усовершенствован и развит его учеником Арнольдом, который доказал, что существуют массивные множества начальных условий, при которых планетные системы, подобные Солнечной, будут существовать вечно. Теория Колмогорова оказалась примененной к огромному числу задач механики, физики и самой математики. Развитые в трудах В.Арнольда и Ю.Мозера идеи Колмогорова получили названия КАМ-теории (теории Колмогорова-Арнольда-Мозера), известной ныне едва ли не каждому математику.

На протяжении почти полувека Андрей Николаевич был общепризнанным мировым лидером в области теории вероятностей. Ему суждено было завершить классическое направление в этой теории, идущей от Я.Бернулли и Лапласа. Его книга, где он подвел итоги первого этапа своей деятельности в этой науке, — «Основные понятия теории вероятностей» — несомненно, самое известное произведение Андрея Николаевича. Исключительную ее роль в истории науки и в их личной судьбе подчеркивали большинство крупнейших специалистов в области теории вероятностей (например, классик теории вероятностей из США Дуб и патриарх японской вероятностной школы Ито). Аксиоматика, введенная и исследованная Колмогоровым, превратила теорию вероятностей из натурфилософской в строгую математическую дисциплину. В антологии по теории вероятностей, изданной в Болгарии, книга А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» соседствует с мемуарами основоположников — Я. Бернулли о законе больших чисел и П. Лапласа о центральной предельной теореме. Книга называется так: «Бернулли. Лаплас. Колмогоров. Вероятность».

С некоторой долей условности можно сказать, что безбрежный математический мир до недавних времен был поделен на две части, на королевство порядка и королевство хаоса. В королевстве порядка господствует дух Лапласа, который утверждал, что знание начальных условий предопределяет поведение системы на все времена. В царстве хаоса владычествует случай — «Бог-изобретатель», говоря словами Пушкина. Андрею Николаевичу Колмогорову выпала доля быть первопроходцем в обоих царствах, первооткрывателем в них многих неизведанных областей. О вкладе его в одну из областей царства порядка мы мельком сказали. В царстве хаоса ему принадлежит честь среди первых ступить в неизведанные просторы марковских процессов, стоять у истоков теории случайных процессов, быть родоначальником теории ветвящихся процессов; список можно продолжать, и всюду в этих разделах ему принадлежат фундаментальные, основополагающие результаты, составляющие ядро современных учебников по теории вероятностей.

Но помимо многочисленных открытий в каждом из этих двух царств, Колмогорову принадлежит величественная концепция единого взгляда на оба эти царства, идея одновременного и параллельного изучения сложности детерминированных и неопределенности случайных явлений. Эта программа и была намечена в той самой статье 1965 года, о которой мы говорили во введении.

Поставим вопрос: что такое случайность, хаос, стохастичность и чем они отличаются от детерминированности, упорядоченности, специфичности?

Вот пример, с которого начинается доклад А.Н. Колмогорова и В.А. Успенского на Первом Всемирном конгрессе Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли (Ташкент, 1986 г.): «Если кто-либо скажет нам, что он подбросил «честную» монету двадцать раз и, обозначив герб единицей, а решетку нулем, получил такой результат: (I) 1000 101110 1111010000 или такой: (II) 0111101 1001101110001, мы вряд ли будем удивлены. Однако, если нам скажут, что результат бросаний был таков: (III) 000000 00000 000000000, мы будем поражены или вообще не поверим или же усомнимся в корректности эксперимента. Возникает вопрос — почему?... По-видимому, цепочки (I) и (II) воспринимаются, как случайные, а цепочки (III) — как неслучайные... Но что означают слова «воспринимается, как случайная»? Классическая теория вероятностей не дает ответа на этот важный вопрос. Не столь редко можно услышать следующее объяснение: вероятность цепочки (III) слишком мала, она равна 2^{-20}. Но ведь ровно такую же вероятность имеют цепочки (I) и (II)».

А.Н. Колмогоров предложил поразительную по красоте идею измерения порядка и хаоса. Последовательность нехаотична, если существует ее простое описание, а если такового не существует, т.е. она достаточно сложна, то она несет в себе все признаки случайной последовательности.

Как же реализуется эта идея? Во множество конечных последовательностей вводится мера их сложности («колмогоровская сложность»). Грубо говоря, сложность последовательности — это длина программы, описывающей данную последовательность. С помощью построенной им меры сложности Андрей Николаевич ввел понятие хаотической последовательности, конечной и бесконечной, и доказал, что хаотические (т.е. сложно устроенные) последовательности ведут себя, как случайные, т.е. к ним «нельзя придраться» с точки зрения теории вероятностей. Эта концепция А.Н. Колмогорова показала всю иллюзорность разграничения царств порядка и хаоса — на самом деле математический мир един и существует огромное число детерминированных динамических систем (и среди них — подобные Солнечной системе!), поведение которых неотличимо от хаотического движения.

В этой концепции А.Н. Колмогорова связались в единый узел едва ли не все его творческие устремления — идеи теории функций и теории вероятностей, конструкции математической логики и теории алгоритмов, понятия и методы теории информации, описания многих явлений динамических систем (в том числе — классической механики), опыт изучения явлений природы.

Заключение

Хочу вернуться к тому, с чего я начал. В течение десяти лет — с 1953 по 1963 год — я очень близко наблюдал за творчеством А.Н.Колмогорова. В истории науки нелегко найти столь блистательный период в жизни какого-либо математика. В эти годы он сдвинул с мертвой точки три фундаментальнейших проблемы нашей науки. Об одной, касающейся устойчивости Солнечной системы (1953—54), я уже говорил. С докладом об этом Андрей Николаевич выступил на Международном Конгрессе в Амстердаме (1954), где ему было предоставлено исключительное право завершить научную программу Конгресса. В 1956—57 годах он получил фундаментальнейший результат, приведший к решению знаменитой 13 проблемы Гильберта. В 1958 году он осуществил радикальный прорыв в эргодической теории динамических систем, совершив переворот в этой важнейшей области математики. В 1960—63 годах он фактически разработал концепцию понимания Хаоса, как Сложности.

В эти годы он руководил работой большого коллектива математиков: В.М. Алексеевым — в области классической механики, М. Арато — в области классической теории вероятностей, В.И. Арнольдом — в области теории суперпозиции и классической механики, Г.И. Баренблаттом — в гидродинамике, Ю.К. Беляевым — в теории случайных процессов, Л.Н. Большевым — в математической статистике, А.А. Боровковым — в классической теории вероятностей, Р.Л. Добрушиным — в теории марковских цепей и теории информации, В.Д. Ерохиным — в теории приближений, В.М. Золотаревым — в теории предельных теорем, Р.Ф. Матвеевым — в теории случайных процессов, П. Мартин-Лефом — в теории сложности, Ю.Т. Медведевым — в математической логике, Л.Д. Мешалкиным — в эргодической теории, М.С. Пинскером — в теории информации, А.В. Прохоровым — в статистической теории стиха, Ю.А. Розановым — в теории случайных процессов, Я.Г. Синаем — в эргодической теории, В.М. Тихомировым — в теории приближений, В.М. Успенским — в математической логике, А.Н. Ширяевым — в теории случайных процессов, — беспрецедентный список!

Я перечислил здесь его непосредственных учеников тех лет, и то далеко не всех. Большинство математиков из этого списка стали крупными учеными, лидерами своих направлений, причем едва ли не самые значительные свои результаты они получили именно в годы общения со своим учителем. Огромное влияние на почти всех математиков того времени оказали лекционные курсы (обязательные и специальные), читавшиеся Андреем Николаевичем, его многочисленные отдельные лекции и выступления. Андрей Николаевич вел в те годы очень большую научно-общественную деятельность — издательскую, энциклопедическую; в качестве декана МГУ много бывал за границей и с огромным успехом (в частности, семестр провел в своей любимой Франции). Он был в замечательной физической форме — совершал трудные горные походы, ходил на лыжах на 40 — 50 километров. Тем поразительнее его полное переключение на новую жизненную стезю, его внезапное и безраздельное увлечение своим интернатом, реформой математического образования, организацией летних школ, музыкальных и иных вечеров для юношества, писанием учебников и учебных пособий, чтением лекций для школьников и учителей.

Это подвижничество, это самоотверженное служение делу Просвящения не было оценено по достоинству. И теперь, в преддверии девяностолетней годовщины со дня рождения этого великого человека, каждому, кому посчастливилось общаться с ним (особенно в последнее двадцатилетие), надлежит внести свою лепту в развитие того дела, которому Андрей Николаевич Колмогоров посвятил эту пору своей жизни.

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения и, прежде всего, на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений, таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 сентября по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7х12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Фамилия, имя, отчество	Федосеев Анатолий Иванович
Класс ЗФШ	10
Профессия родителей	мать - инженер, отец - врач
Подробный домашний адрес	240812, г. Калуга, ул. Пушкина, д.24, кв. 26
Номер и адрес школы	школа 777, ул. Садовая, д. 11

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1 — 4, поступающим в 11 класс — задачи 4 — 7.

1. При торможении от скорости $v_1 = 40$ км/ч до полной остановки автомобиль прошел путь $s_1 = 16$ м. Какой путь пройдет этот автомобиль по той же дороге при уменьшении скорости от $v_2 = 100$ км/ч до $v_3 = 60$ км/ч? Считайте, что при торможении ускорение постоянно и одинаково в обоих случаях.

2. Легкую сферу массой $m = 80$ г взвешивают в воздухе. При температуре воздуха $t = -47$ °С вес сферы оказался равным $P = 0{,}1$ Н. При какой температуре воздуха сфера перестанет давить на чашку весов? Изменением объема сферы можно пренебречь, давление воздуха считать неизменным, а ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

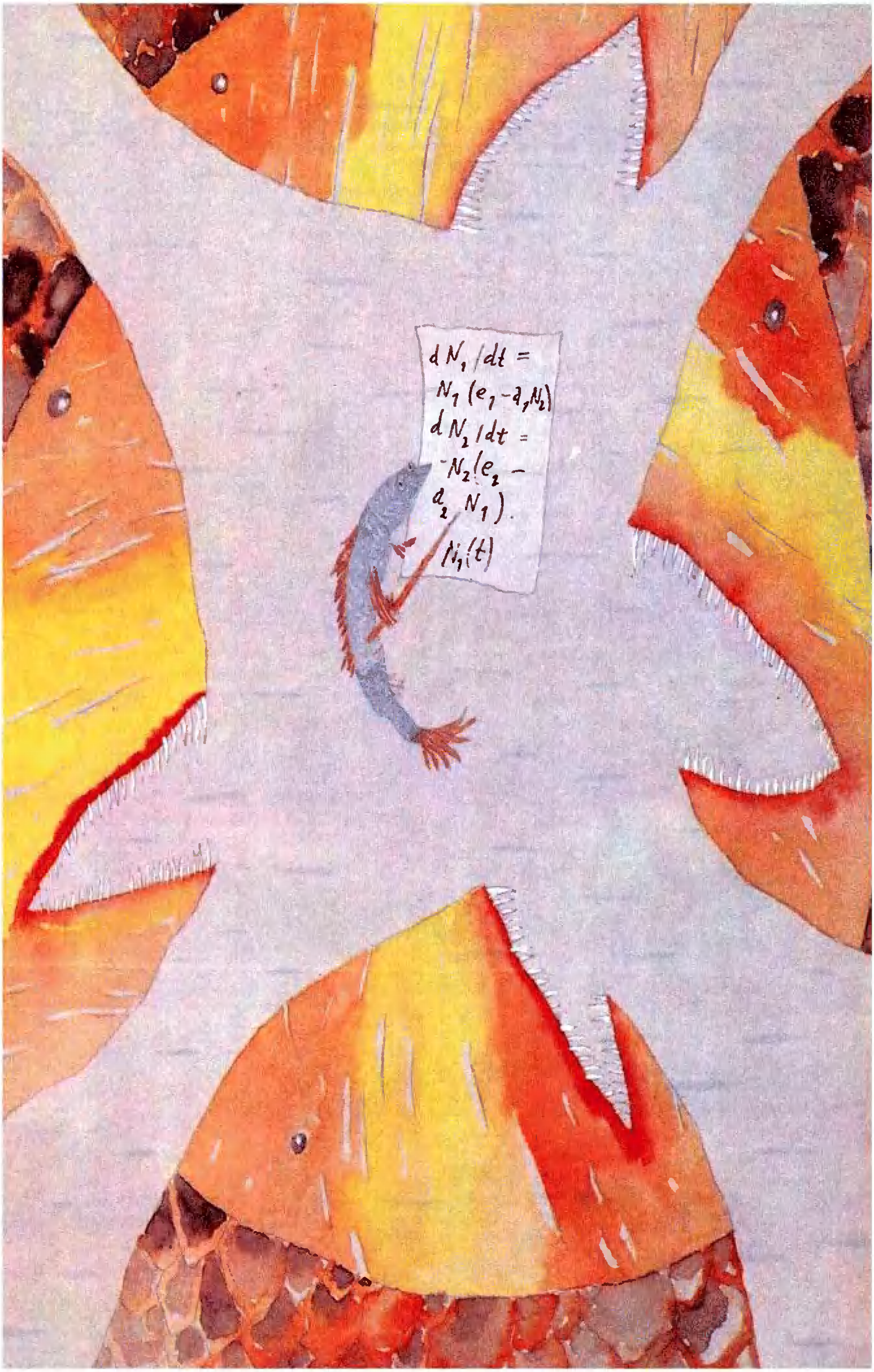
3. Тело массой m соскальзывает с наклонной плоскости и затем движется по горизонтальной плоскости, проходя до остановки путь s. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы вернуть тело в исходную точку по прежней траектории? Плоскость наклонена к горизонту под углом α, коэффициент трения при движении одинаков на всем пути и равен μ.

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики и дайте ее решение.

5. В некотором процессе давление и объем одного моля идеального газа связаны соотношением $p - p_0 = A(V - V_0)$, где постоянные величины A, p_0 и V_0 известны. Чему равно давление одного моля газа в этом процессе при температуре T?

6. Три точечных заряда, попарно помещенные на расстоянии $L = 10$ см друг от друга в вакууме, отталкиваются с силами $F_1 = 5$ Н, $F_2 = 10$ Н и $F_3 = 12$ Н. Найдите величины этих зарядов.

7. Чему равен потенциал изолированного незаряженного металлического шара радиусом R, если на расстоянии a ($a > R$) от его центра находится точечный заряд q?


$dN_1/dt =$
$N_1(e_1 - a_1 N_2)$
$dN_2/dt =$
$-N_2(e_2 -$
$a_2 N_1).$
$N_1(t)$

ХИЩНИК И ЖЕРТВА

УРАВНЕНИЯ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ

КОНСТАНТИН БОГДАНОВ

Вольтерра и Мальтус

Попытки математического описания динамики численности отдельных биологических популяций и сообществ имеют солидную историю. Одна из первых моделей динамики роста популяций принадлежит Т.Мальтусу (1766—1834), английскому экономисту и священнику.

В своем труде «Опыт о законе народонаселения» (1798г.) Мальтус утверждал, что в человеческом обществе, как и во всей живой природе, существует абсолютный закон безграничного размножения особей. При этом рост населения Земли идет в геометрической прогрессии, в то время как средства существования увеличиваются лишь в арифметической. Мальтус, абсолютизируя роль биологических факторов в воспроизводстве населения, рисует жестокие последствия открытого им закона народонаселения: «Человек, появившийся на свет, уже занятый другими людьми, если он не получил от родителей средств к существованию, на которые он вправе рассчитывать, если общество не нуждается в его труде, не имеет никакого права требовать для себя какого-нибудь пропитания, ибо он совершенно лишний на этом свете. На великом пиршестве природы для него нет прибора. Природа приказывает ему удалиться, и если он не может прибегнуть к состраданию кого-либо из пирующих, она сама принимает меры к тому, чтобы ее приказание было приведено в исполнение». Врачебную деятельность Мальтус считал противоестественной, так как она сохраняет жизнь «лишним людям».

Модель Мальтуса в математической форме выглядит довольно просто. Пусть $N(t)$ — численность изучаемой популяции в момент t. Согласно Мальтусу, скорость прироста популяции прямо пропорциональна ее численности в данный момент, или

$$dN/dt = aN,$$

где a — разность между коэффициентами рождаемости и смертности. Интегрируя это уравнение, получаем

$$N(t) = N(0)e^{at},$$

где $N(0)$ численность популяции в момент $t = 0$. Очевидно, что модель Мальтуса при $a > 0$ дает бесконечный рост численности, что никогда не наблюдается в природных популяциях, где ресурсы, обеспечивающие этот рост, всегда ограничены. Изменения численности популяций растительного и животного мира нельзя описывать простым законом Мальтуса, на динамику роста влияют многие взаимосвязанные причины — в частности, размножение каждого вида саморегулируется и видоизменяется так, чтобы этот вид сохранялся в процессе эволюции.

Математическим описанием этих закономерностей занимается *математическая экология* — наука об отношениях растительных и животных организмов и образуемых ими сообществ между собой и с окружающей средой.

Первым успехом математической экологии стала модель, предложенная итальянским математиком Вито Вольтерра (1860—1940) в книге «Математическая теория борьбы за существование» (1931г.). Интересна биография этого ученого, известного своими классически-

Графика Леонида Тишкова

ми работами по интегральному исчислению и функциональному анализу. Во многом она созвучна названию только что упомянутой книги.

Когда Вито было 2 года, умер отец, и семья осталась практически без средств к существованию. И все же, как это ни было трудно, Вито удается получить образование. Еще подростком он изучает дифференциальное исчисление; не зная интегрального исчисления, вновь открывает его. Он блестяще оканчивает естественный факультет университета во Флоренции. Вольтерра очень быстро завоевывает мировую известность своими работами в различных областях чистой математики. Но всегда его интересуют и различные прикладные задачи.

В 1925 году из бесед с молодым зоологом Умберто Д'Анконом он узнает любопытный факт из статистики рыбных рынков на Адриатике. Оказывается, когда в годы первой мировой войны и сразу после нее интенсивность промысла резко сократилась, то в улове выросла относительная доля хищных рыб. Чтобы объяснить это, Вольтерра предложил математическую модель, описывающую отношения между хищником и жертвой и происходящие при этом изменения их численности. Математическая экология в дальнейшем становится его основной темой, и он занимается ею до конца жизни.

В Вито Вольтерра сочетались талант исследователя и темперамент активного политика. В 1905 году он был самым молодым сенатором в Итальянском королевстве. Человек прогрессивных взглядов, активный противник фашизма, он был единственным сенатором, проголосовавшим против передачи власти Муссолини в 1922 году. Последовала политэмиграция во Францию; Муссолини, пытаясь укрепить престиж фашистской диктатуры, приглашает Вольтерра вернуться в Италию, обещая почетные титулы и посты,— но ученый отказывается.

Один из фрагментов книги Вольтерра посвящен анализу «взаимоотношений» между хищником и жертвой. В следующем разделе мы посмотрим, как решал эту задачу сам Вольтерра, а потом попробуем исследовать эволюцию системы «хищник — жертва», моделируя ее с помощью компьютера. Итак, начинаем.

Борьба за существование

Пусть имеется два вида животных, один из которых пожирает другой (хищники и жертвы). При этом относительный прирост в единицу времени численности жертв, живущих изолированно (в отсутствие хищников), равен e_1, в то время как хищники, отделенные от своих жертв, постепенно умирают с голоду, и относительное падение их численности в единицу времени составляет e_2.

Как только хищники и жертвы начинают обитать в непосредственной близости друг от друга, изменения численности их популяций становятся взаимосвязанными. В этом случае, очевидно, относительный прирост численности жертв будет уже зависеть от размеров популяции хищников и будет уменьшаться с ростом этой популяции. Для относительного прироста популяции хищников, который можно считать пропорциональным размерам популяции жертвы, будет верна противоположная зависимость. Все, что было только что сказано, можно записать в виде

$$\begin{cases} dN_1/dt = N_1(e_1 - a_1N_2), \\ dN_2/dt = -N_2(e_2 - a_2N_1), \end{cases} \qquad (1)$$

где N_1, N_2 — число жертв и хищников, соответственно, в момент t; a_1, a_2 — постоянные коэффициенты.

Читатель, наверное, заметил, что как в модели Мальтуса, так и при формализации отношений «хищник — жертва» (модель известна под названием «модель Вольтерра — Лотка») априори считается, что все хищники (и все жертвы) находятся в одинаковых условиях. Иными словами, коэффициенты в системе (1) не зависят от того, какую именно часть популяции мы хотим описать (такую популяцию называют пространственно однородной). Очевидно, что такое предположение оправдано далеко не всегда. Можно себе представить реальные ситуации, когда несколько хищников находятся очень далеко от жертв (a_2 мал), а другие — вблизи (большой a_2), и описание всей популяции только одной системой (1) становится невозможным. Чуть позже мы покажем, как компьютер помогает нам моделировать эти реальные ситуации. Ну а сейчас опять вернемся к системе уравнений (1).

К сожалению, решить эту систему уравнений аналитически, т.е. выразить $N_1(t)$ и $N_2(t)$ через известные элементарные функции, невозможно. Конечно, можно было бы решить эти уравнения численно, с помощью компьютера, который выдал бы, например, графики функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$. Меняя параметры, можно было бы увидеть, как изменяется вид этих графиков. Вместо этого мы проведем качественный экспресс-анализ уравнений, который позволит нам понять основные свойства их решений. А именно, рассмотрим такие случаи, когда вид уравнений сильно упрощается.

Посмотрите внимательно на систему (1) и вы легко найдете одно из решений системы — стационарное. Если считать, что число жертв и хищников не изменяется со временем, то левые части (1) обращаются в нуль, а из правых мы найдем, что такое равновесие будет возможно, только если $N_1 = e_2/a_2$, а $N_2 = e_1/a_1$. Это и является одним из решений системы.

А теперь предположим, что система «хищник — жертва» каким-то образом оказалась вблизи равновесия и численности хищников и жертв мало отличаются от соответствующих стационарных значений. Пусть $N_1 = e_2/a_2 + n$, а $N_2 = e_1/a_1 + x$, где n и x мы будем считать малыми по сравнению с N_1, N_2. Подставляя эти выражения в (1) и пренебрегая их по сравнению с остальными членами, получаем

$$\begin{cases} dn/dt = -xa_1e_2/a_2, \\ dx/dt = ne_1a_2/a_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Введем вместо n новую переменную $v = na_2e_1/a_1$. После соответствующей замены система (2) преобразуется в следующую:

$$\begin{cases} dv/dt = -e_1e_2x, \\ dx/dt = v. \end{cases} \qquad (3)$$

А теперь вспомним систему уравнений, описывающую движение пружинного маятника. Пусть x — смещение центра тяжести этого маятника от положения равновесия, а v — его скорость. Ну конечно же, система (3) может описывать движение такого маятника, если e_1e_2 положить равным отношению жесткости пружины к массе маятника. А значит, наша система уравнений будет иметь такое же решение, как и «школьная задача» о колебаниях пружинного маятника.

Совпадение уравнений, описывающих колебания пружинного маятника и численность особей в системе «хищник — жертва», позволяет утверждать, что число хищников и жертв должно изменяться колебательным образом с периодом $2\pi/\sqrt{e_1e_2}$. Кроме того, известно, что колебания скорости маятника опережают колебания его координаты на четверть периода. Поэтому колебания численности жертвы также должны опережать колебания численности хищников на четверть периода.

Итак, решением системы уравнений Вольтерра — Лотка являются колебания численности хищников и жертв, сдвинутые друг относительно друга по фазе, с периодом, равным $2\pi/\sqrt{e_1e_2}$. Конечно, когда размах этих колебаний увеличивается, они перестают быть синусоидальными, однако их период остается прежним. (Это подтверждается численным решением системы уравнений (1).)

И все-таки согласитесь, не очень верится, что система «хищник — жертва» служит этаким незатухающим генератором колебаний! Может быть, моделирование отношений между хищником и жертвой системой уравнений (1) слишком упрощает ситуацию?

Забудем об уравнениях

Действительно, забудем об уравнениях. Представим себе, что перед нами гипотетический двухмерный океан, разделенный на одинаковые квадраты взаимно перпендикулярными прямыми. Наш океан населяют только два вида рыб — безобидные скумбрии и пожирающие их акулы. При этом в каждом месте пересечения прямых (узле) может в данный момент времени находиться либо одна из этих рыб, либо вообще ничего (рис.1). Теперь опишем поведение животных, которыми мы заселили океан.

1. Скумбрии и акулы могут плавать, перемещаясь за единицу времени из того узла, в котором они находятся, в один из соседних. При этом скумбрия перемещается с равной вероятностью в любой из незанятых соседних узлов. Акула же сначала определяет, находится ли рядом скумбрия, и если это так, то плывет именно к тому узлу и поедает ее. Если рядом с акулой скумбрии отсутствуют, то она с равной вероятностью переплывает в любой из соседних узлов.

2. Акулы и скумбрии «взрослеют», и их возраст увеличивается на единицу, когда истекает один тактовый интервал жизни океана (о том, из чего состоит этот интервал, — несколько позже). При достижении определенного возраста (T_c — для скумбрии и T_a — для акулы) каждая рыба начинает через равные промежутки времени производить на свет по одному детенышу. Родившийся детеныш сначала размещается в любом из узлов, соседних с матерью, а потом на него распространяются те же законы, что и на остальных.

3. Если акула в течение некоторого количества (Г) последовательных тактовых интервалов ни разу не поймала скумбрию, она погибает от голода. Скумбрия в нашем океане может погибнуть только в пасти акулы, потому что она питается планктоном, который всегда в избытке.

4. Океан имеет конечные размеры и прямоугольную форму, а животные, оказавшиеся вблизи его берегов, никогда не выбрасываются на берег, а те, которые в отчаянии все-таки хотят это сделать, оказываются сразу на противоположной стороне океана. Другими словами, наш океан покрывает поверхность тороидальной планеты.

Итак, условия жизни обитателей океана заданы. Жизнь начинается! Случайным образом 1) разбросаем акул и скумбрий по океану и перенумеруем их, 2) установим возраст каждому животному и 3) для каждой акулы определим момент, когда она умрет с голоду, если не съест скумбрию. Все это, конечно, мы сделаем с помощью компьютера, который и будет следить за жизнью придуманного нами океана.

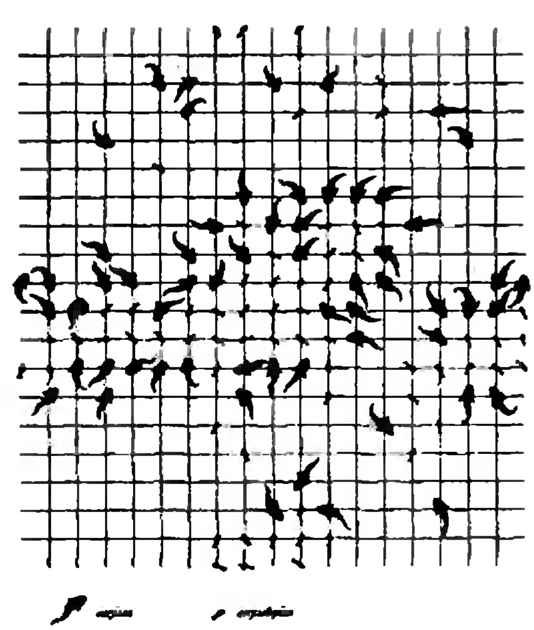


Рисунок 1

Двухмерная модель океана, в котором обитают только акулы и скумбрии.

Начинается первый такт жизни океана. Пусть сначала на один шажок переместится первая скумбрия и, если подошел срок, размножится, затем вторая, третья..., а после начнут свою однoактовую охоту акулы. В конце такта подведем итог, исключив акул, умерших от голода, и скумбрий, съеденных акулами, а также прибавив родившихся животных. После этого можно начинать следующий такт и т.д. В результате мы (т.е. компьютер) сможем проследить, как изменяются со временем численности акул и скумбрий в океане.

На рисунке 2 показаны результаты такого компьютерного моделирования для различных значений T_c и T_a (значения Г, а также начальные численности акул и скумбрий оставались неизменными и составляли 5, 20 и 200 соответственно). Видно, что число акул и скумбрий в океане колеблется с определенной частотой, и максимум численности у скумбрий всегда достигается чуть раньше, чем у акул.

Кроме того, анализируя изменения параметров на рисунках 2, *а* — *г*, можно заключить, что период колебаний численности животных пропорционален $\sqrt{T_a T_c}$. Действительно, увеличение T_c в 4 раза (сравните рис. 2,*а* и 2,*б*) привело к 2-кратному росту периода колебаний. Такие же изменения происходят при росте T_a (сравните рис. 2,*а* и 2,*в*) и одновременном росте T_c и T_a (рис.2,*г*).

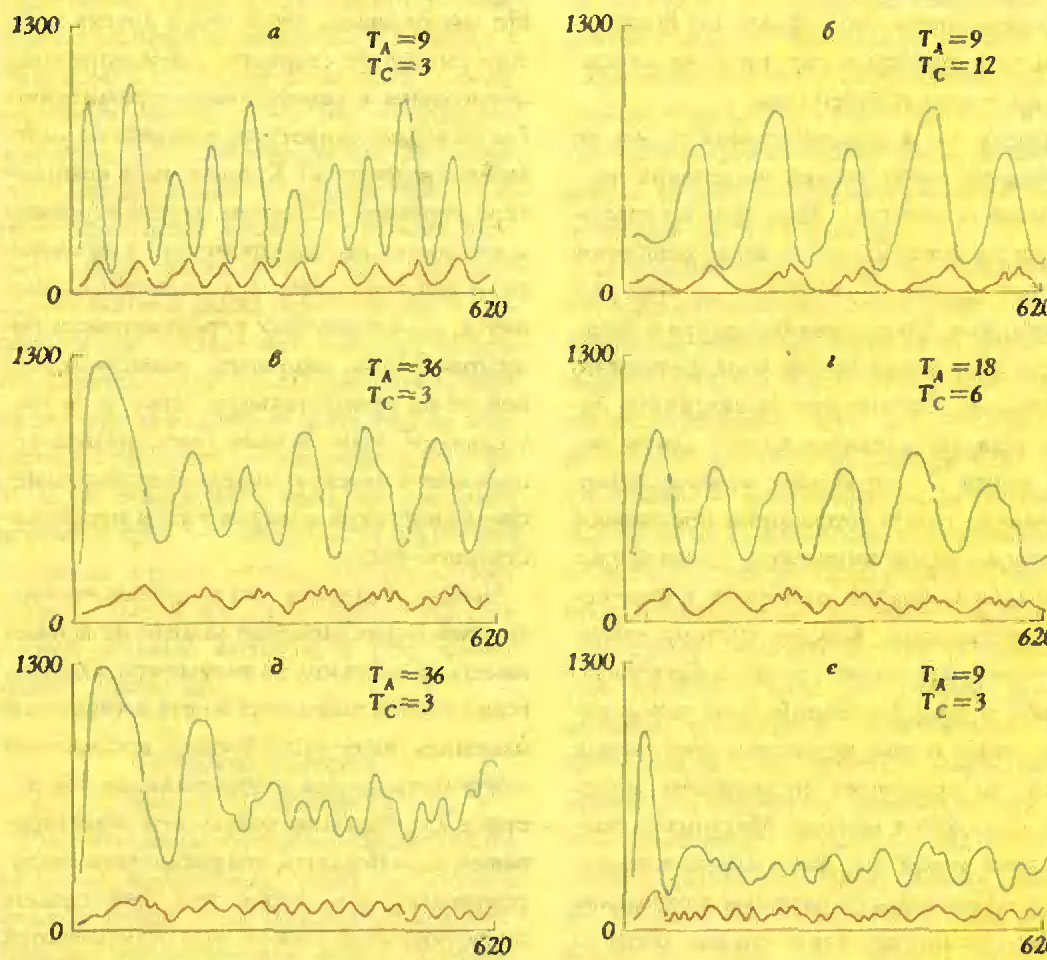


Рисунок 2

Изменение численности акул и скумбрий в воображаемом океане (результаты моделирования на компьютере). По ординате — число особей; по абсциссе — время в относительных единицах. T_c и T_a — интервалы времени, через которые у скумбрий и акул, соответственно, появляется потомство. Верхние кривые — изменение численности скумбрий; нижние — акул.

Однако не всегда колебания численности протекают так гладко, как это изображено на рисунках 2, *а* — *г*. Довольно часто колебания сбиваются или их периоды начинают изменяться в широких пределах (как, например, на рисунке 2,*д*). В некоторых случаях акулы, оказавшись волею судеб вдалеке от своих жертв, все погибают, и численность рыб начинает монотонно расти, пока они не займут весь океан. Отметим, что такие аномальные ситуации, связанные со случайно-неравномерным распределением особей, не описываются уравнениями (1).

Таким образом, моделирование с помощью компьютера «реальной» жизни в системе «хищник — жертва» дало почти те же результаты, что и уравнения Вольтерра, хотя и высветило ситуации, не описываемые этими уравнениями.

Почему же в действительности мы не наблюдаем таких резких изменений численности животных? Ведь, судя по графикам на рисунках 2,*а* и 2,*б*, число хищников и жертв должно изменяться в десятки раз! Ответ прост. Уравнения Вольтерра и наша модель описывали жизнь изолированного сообщества, состоящего из хищников одного вида, питающихся только одним видом жертв. А это бывает крайне редко. Обычно на одной территории проживают несколько видов хищников, питающихся несколькими видами животных, в том числе и хищниками. Каждая система «хищник—жертва» имеет свою собственную частоту и фазу колебаний. Если таких систем много и они перекрываются между собой, то колебания численности животных становятся меньше. Механизм гашения здесь такой же, как в случае маятников, колеблющихся с разными периодами.

И все же бывают такие случаи, когда на большой территории один вид хищников противостоит только одному виду жертв. В результате численность этих видов претерпевает со временем очень большие изменения, что полностью согласуется с моделью Вольтерра—Лотка. Классическим примером этого может служить сообщество «рысь — заяц» в районе Гудзонова залива в Северной Америке. На рисунке 3 показано, как изменялся ежегодный отлов рысей и зайцев одной из североамериканских компаний в течение последовательных 50-ти лет.

Неужели мы «попали в десятку» и, даже не побывав в Гудзоновом заливе, прекрасно разобрались во взаимоотношениях рысей и зайцев, обитавших там сотню лет тому назад? А может, это случайное совпадение? Ведь только что описанная модель очень груба. По установленным в ней правилам хищники умирают только от голода, а их жертвы — только в пасти хищников. Но мы-то знаем, что и тех и других ждет еще смерть от старости. Да и животные обрисованы в модели очень примитивно. Где вы видели животных, которые не умнели бы с возрастом? Кроме того, в компьютере хищники и жертвы перенумерованы и двигаются не одновременно, а по очереди. А вдруг результат моделирования изменится, если животных перенумеровать по-другому? Или, например, поместить особей не на прямоугольную сетку, а на треугольную? Или, может быть, нельзя использовать плоскую модель, а нужно поместить хищников и жертв в узлы пространственной сетки?

Можно убедиться, что подобные «технические» видоизменения модели не влияют заметным образом на результаты. Однако, если правила поведения жертв и хищников изменить более существенно, последствия могут быть весьма значительными. На рисунке 2,*е* показаны результаты моделирования, если полагать, что рыбы стали «осторожными», т.е. перед тем, как сделать очередной свой шажок, они оглядываются вокруг. И если рядом акула, рыба поплывет в противоположную от хищника сторону. При таком алгоритме поведения рыб значительные и регулярные колебания численности возникают гораздо реже.

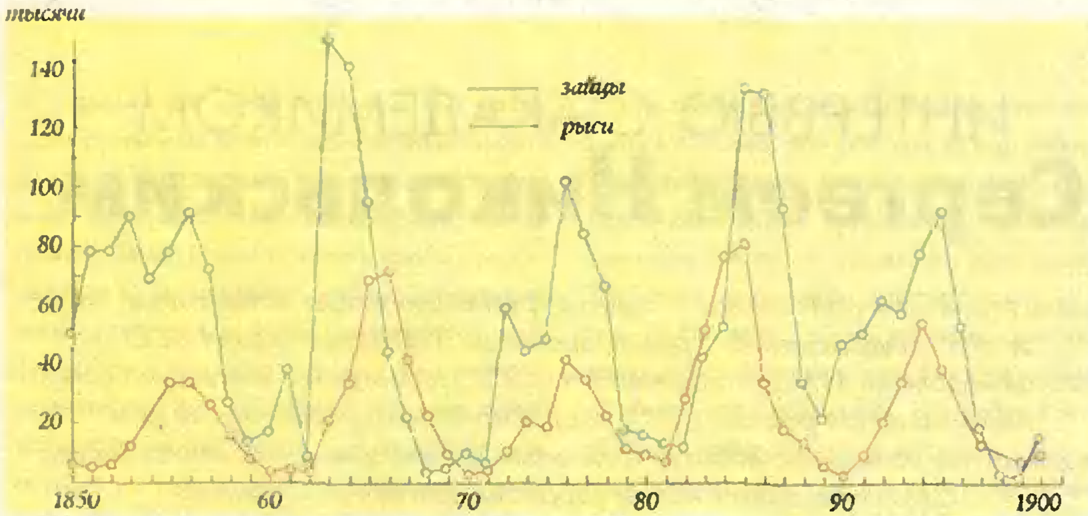


Рисунок 3

Данные промысла зайца (синяя кривая) и рыси (красная) в Гудзоновом заливе в течение второй половины XIX века.

Вопросы о корректности модели возникают почти всегда, когда пытаются моделировать сложные процессы в природе и обществе. С одной стороны, всякое моделирование невозможно без упрощения процесса, без пренебрежения второстепенными деталями. С другой, есть риск «переупростить» модель, отбросив важные черты явления – ведь довольно трудно понять, какая черта процесса второстепенна, а какая нет, пока он не изучен. Поэтому задача исследователя — найти золотую середину, создать модель процесса, не лишая его первостепенных черт. И здесь нельзя дать никаких «верных» рекомендаций — приходится надеяться только на опыт и интуицию. Попробуйте и вы, читатель, изменяя параметры описанной модели, вдохнуть в нее больше жизни. Удачи вам!

Экология и физика (вместо заключения)

Тому читателю, который добрался до конца наших рассуждений, будет интересно и приятно узнать, что, наблюдая за захватывающими приключениями акул и скумбрий, он одновременно и совершенно бесплатно приобрел представление, например, о... кинетике химических и ядерных реакций. (Кинетика описывает развитие процесса во времени.) Частицы — назовем их реагентами — за счет диффузии движутся, встречаясь друг с другом, вступают в реакции, в которых они «гибнут», производят новые частицы и т.д. Размножение рыб соответствует, например, цепной ядерной реакции, их умирание — поглощению частиц в реакторе.

Для решения таких задач обычно используют как раз один из описанных нами приемов. Записывая уравнения, похожие на уравнения системы (1), получают более грубое, усредненное понимание того, как меняется со временем количество частиц в системе. Другой подход— компьютерное моделирование системы— позволяет получить более подробное (с учетом пространственных неоднородностей) описание процессов, но требует гораздо больших затрат компьютерного времени. Решая эти задачи, физики активно используют качественный экспресс-анализ, моделируют систему на современных компьютерах, ломают голову над тем, какие «правила игры» больше соответствуют реальной системе. Словом, делают то же самое, что делали мы с вами, решая «чисто экологическую» задачу— исследуя численность популяций в животном мире.

А казалось бы— что общего между физикой и экологией?

ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ
Сергеем Никольским

Сергей Михайлович Никольский — один из крупнейших наших математиков, лауреат двух Государственных премий, премии им. П.Л.Чебышева АН СССР, золотой медали им. И.М.Виноградова АН СССР. Несмотря на свой весьма солидный возраст (он родился в 1905 году), Сергей Михайлович по сей день ведет активную научную работу. Предлагаем вашему вниманию запись беседы С.М.Никольского с нашим корреспондентом А.П.Савиным.

А.С.: Сергей Михайлович, прежде всего от имени редакции журнала «Квант» я хотел бы поздравить вас с недавним присуждением вам награды Академии наук — золотой медали имени И.М.Виноградова.

Думаю, нашим читателям — школьникам, увлеченным физикой и математикой, — интересно будет узнать о ваших школьных годах, о том, как начинался ваш путь в математику, как и когда вы поняли, что эта наука — ваше призвание.

С.Н.: В 1913 году я поступил в городе Чернигове в классическую гимназию. По математике учился отлично; правда, в приготовительном классе учитель ставил мне по математике тройки, хотя я несомненно заслуживал большего. Но в 1918 году (к тому времени я закончил четвертый класс) семья была вынуждена уехать в деревню — началась гражданская война. В результате мое школьное обучение прервалось до 1922 года.

Мой отец, довольно суровый человек, чем-то похожий на князя Болконского из романа А.Н.Толстого «Война и мир», был лесничим. Он окончил Петербургский лесной институт, где, в частности, изучал и математику, которой потом интересовался всю жизнь. Отдавая себе отчет в том, что его дети лишены возможности учиться в школе, он всячески поощрял самостоятельные занятия. Я, например, занимался математикой и физикой. Иногда отец неожиданно задавал нам проверочные вопросы. Помню, однажды во время обеда он обратился к моей сестре: «Надежда, чему равняется логарифм нуля?» Надя ответить не смогла. «Чему же вас в гимназии учили? — рассердился отец. (Она уже окончила гимназию.) «А что ты скажешь, Сережа?» — обратился он ко мне. О логарифме я тогда знал не из книг, а из бесед с отцом. Знал, например, что логарифм ста равен двум, а логарифм одной десятой — минус единице. Отец рассказывал мне также о бесконечно малых и бесконечно больших, о бесконечности. Поэтому, поразмыслив, я ответил: «Минус бесконечность». Похвала отца за этот ответ запомнилась мне на всю жизнь.

Вот в такой деревенской обстановке я кое-что узнавал о математике. Между прочим, примитивный уровень изложения, доступный самому широкому кругу читателей, на котором написана моя книга «Элементы математического анализа», ведет свое начало от тех моих давних бесед с отцом в лесничестве, когда мне было 14 — 15 лет. Такой стиль закрепился впоследствии, когда мне пришлось преподавать одновременно и арифметику, и математический анализ людям, не имевшим настоящего среднего образования, на рабфаке Днепропетровского университета.

К 1925 году, завершив среднее образование, я начал выбирать дальнейший путь. Отец рассуждал так: «Серега у нас хороший математик, — значит, будет инженером». Хорошее знание математики он считал лишь обязательным условием для поступления в приличный технический вуз по конкурсу.

Я разделял его точку зрения и был готов идти учиться на любую инженерную специальность. Однако в то время для поступления в вуз нужна была командировка с места работы. Мне удалось получить такую командировку в Днепропетровский университет, и я поступил туда на физико-математический факультет в надежде перевестись позже в технический вуз. Но через год мне стало ясно, что мое призвание — математика, и я остался учиться в университете, хотя близкие пугали меня карьерой преподавателя математики в ремесленном училище (типа теперешнего ПТУ).

А.С.: В каких областях математики вы работали, чем занимаетесь сейчас?

С.Н.: Первые мои работы были посвящены функциональному анализу. Что это такое? Не вдаваясь в существо этой достаточно сложной теории, скажу лишь, что многие прикладники, например специалисты по теории упругости, нуждаются в ней. Затем я заинтересовался теорией аппроксимации функций — приближением функций, имеющих сложную природу, более простыми функциями. В частности, оценками точности таких приближений. В то время таких оценок было мало. Отмечу, что одну из них предложил А.Н.Колмогоров. Одновременно со мной ряд оценок получил француз Фавар, позже интересные оценки вывели наши математики М.Г.Крейн и Н.И.Ахиезер. Результаты, полученные мной в этой области, составили мою докторскую диссертацию. Затем я обратился к функциям многих переменных, и здесь обнаружилась связь теории дифференциальных уравнений с результатами моих предыдущих исследований. Толчком к этому послужило знакомство с работами С.Л.Соболева. Я понял, что если развить мои методы в эту сторону, можно доказать теоремы, подобные тем, которые получил Сергей Львович. Сейчас они называются «теоремами вложения». Полученные мной теоремы оказались для тех классов функцией, которыя я рассматривал, более далеко идущими, чем теоремы Соболева.

В процессе этих исследований у меня появились ученики, которые до сих пор работают в этой области. В их числе Л.Д. Кудрявцев, О.В.Бесов. Мы организовали в Математическом институте Академии наук имени В.А.Стеклова семинар, работающий с 1950 года по сей день , где обсуждаются вопросы этого рода и близкие к ним. Но я не забывал и теорию аппроксимации. Ряд работ в этой области, выполненных в последние 2 — 3 года, и были представлены при выдвижении на присуждение медали И.М.Виноградова.

А.С.: За вашу долгую жизнь вы встречались со многими замечательными учеными. Не могли бы вы рассказать об этих встречах?

С.Н.: Из всех ученых, с которыми мне довелось встретиться, наибольшее влияние на меня оказал Андрей Николаевич Колмогоров. У меня «провинциальное» высшее образование — я окончил Днепропетровский университет, притом не очень рано — в 24 года. Я много знал по книгам, но у меня не было творческого окружения, которое способствовало бы определенным занятиям наукой. Но вот с 1930 года в Днепропетровский университет начали приезжать А.Н.Колмогоров и П.С. Александров. Дважды в год, весной и осенью, они читали нам лекции.

В то время Днепр в Днепропетровске был прекрасен. Сейчас я не назову его прекрасным из-за построенной плотины, но тогда это была чудесная быстрая и чистая река, на которой бушевали пороги. П.С. Александров и А.Н.Колмогоров любили купаться в реке и кататься на лодке, а я их часто сопровождал. Эти поездки стали для меня замечательной школой, там я получил от Колмогорова ряд задач по теории аппроксимации, с решения которых и началась моя научная работа в этой области математики. Колмогоров организовал также небольшой семинар в Днепропетровском университете для студентов и молодых преподавателей, который я вел в его отсутствие. Из этого семинара в Днепропетровске возник в дальнейшем исследовательский центр по теории аппроксимации.

Общение с Колмогоровым продолжилось затем в Москве, куда я переехал в 1940 году. Мы много обсуждали с ним различные вопросы, связанные с теорией функций. В Москве я также ближе познакомился с И.Г.Петровским, впоследствии ректором МГУ, — до этого нам приходилось встречаться в Днепропетровске, куда Иван Георгиевич несколько раз приезжал.

После переезда я начал работать в отделе теории функций Математического института Академии наук, которым с 1940 года заведовал академик М.А.Лаврентьев, а в дальнейшем, в конце войны, академик Н.Н.Лузин. В этом отделе я работал с замечательными математиками, учениками Н.Н.Лузина, супругами П.С.Новиковым и Л.В.Келдыш. Правда, они к тому времени отошли от теории функций — Петр Сергеевич в это время занимался алгеброй и математической логикой, а Людмила Всеволодовна — топологией.

В первые годы после войны в МИАНе появился Сергей Натанович Бернштейн, крупнейший специалист в области теории аппроксимации. Он организовал отдел конструктивной теории функций. Так он называл теорию аппроксимации, считая ее одним из методов изучения функций. Я довольно активно работал в его отделе, а в 1954 году вернулся в отдел М.А.Лаврентьева. Кстати, там в это время работал и будущий президент Академии наук Мстислав Всеволодович Келдыш.

Когда М.А.Лаврентьев уехал в Новосибирск организовывать Сибирский научный центр, он передал мне руководство своим отделом. В это время мне пришлось также много заниматься организационными вопросами, поскольку А.Н.Несмеянов привлек меня к работе по созданию Института научной информации, где я возглавил реферативный журнал «Математика».

А.С.: Сергей Михайлович, вы ведете большую педагогическую работу, будучи профессором Московского физико-технического института; в то же время вы — автор нескольких учебников для средней школы. Как вы относитесь к программам и учебникам, по которым сейчас учатся школьники?

С.Н.: Я преподавал не только в элитных вузах типа МФТИ, но и в обычных — Днепропетровском институте инженеров транспорта, Днепропетровском университете; будучи студентом, давал уроки как репетитор, а сразу после окончания университета вел занятия в школе и фабзавуче.

Постановка математического образования в школе меня всегда интересовала, и когда в Академии наук была создана комиссия по школьным вопросам, я вошел в ее состав, а в последнее время возглавил комиссию по математике при Министерстве образования. В ряде вопросов преподавания математики я отстаиваю свою точку зрения. В первую очередь это касается понятия действительного числа, которое считается трудным, но выражает такую важную практическую вещь, как длина отрезка. Это должно быть объяснено достаточно рано (в 5 — 6 классах). Нужно только найти пути для элементарного, доступного школьникам изложения.

Большее внимание, чем сейчас, следует уделять преподаванию арифметики, сделав более логичным изложение этого предмета. Например, логичнее проходить сначала обыкновенные дроби, а потом уже десятичные.

При изучении буквенных (алгебраических) выражений должно быть больше алгебры. Ряд упрощений возможен при преподавании математического анализа.

Чтобы осуществить эти идеи, небольшим педагогическим коллективом (профессор М.К.Потапов, кандидаты наук Н.Р.Решетников и А.В.Шевкин и я) мы написали учебники «Арифметика» и «Алгебра».

А.С.: Что вы посоветуете школьникам?

С.Н.: И школьникам, и студентам, даже в нынешнее время, когда спрос на науку невелик, я посоветовал бы учиться. Знания, полученные сейчас, принесут вам большую пользу в будущем. Если можете — учитесь, а не будете учиться — потом пожалеете. ■

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА **«ЗАДАЧНИК «КВАНТА»**

Поздравляем победителей этого конкурса за 1992 год.

Получили право участвовать сразу в заключительных турах физико-математических олимпиад 1993 года:

Россия

по математике

Замятин Владимир — Киров, ФМЛ № 35, 11 кл.,
Зеленов Сергей — Киров, ФМЛ № 35, 10 кл.,
Мальков Кирилл — Киров, ФМЛ № 35, 10 кл.,
Павловский Игорь — Омск, ФМШ № 64, 11 кл.,
Топчий Анна — Омск, ФМШ № 64, 11 кл.,
Тройников Михаил — Ижевск, с.ш. № 30, 11 кл.;

по физике

Быстров Александр — Нижний Новгород, с.ш. №82, 10кл.,
Ветров Андрей — Северодвинск, с.ш. № 17, 11 кл.,
Ковалев Алексей — Киров, ФМЛ № 35, 11 кл.,
Колесников Алексей — Воронеж, колледж № 1, 11 кл.,
Косицын Михаил — Тольятти, ЕГЛ, 11 кл.,
Мелентьев Павел — Старый Оскол, с.ш. № 16, 11 кл.,
Пиколов Алексей — Конош, с.ш. № 64, 11 кл.,
Понкратов Владимир — Старый Оскол, с.ш. №16, 10кл.

Украина

по математике

Алексеенко Юрий — Киев, школа-лицей № 145, 11 кл.,
Бурд Олег — Киев, школа-лицей № 145, 11 кл.,
Вайнер Борис — Киев, школа-лицей № 145, 11 кл.,
Дудко Денис — Киев, с.ш. № 61, 11 кл.,
Коробош Илья — Донецк, с.ш. № 17, 10 кл.,
Пиковский Владислав — Киев, с.ш. № 206, 11 кл.,
Сушков Владислав — Винница, ФМШТ № 17, 11 кл.,
Турчин Евгений — Днепропетровск, с.ш. № 23, 11 кл.;

по физике

Апальков Дмитрий — Харьков, с.ш. № 16, 9 кл.,
Волозин Андрей — Севастополь, гимназия № 1, 11 кл.,
Жак Сергей — Тернополь, ФМГ № 1, 11 кл.,
Кирилюк Андрей — Одесса, Ришельевский лицей, 11кл.,
Слюсоренко Алексей — Киев, школа-лицей №145, 10кл.,
Тумаха Сергей — Киев, с.ш. № 206, 10 кл.,
Якупов Ренат — Кузнецовск, с.ш. № 1, 11 кл.,
Янченко Роман — Кузнецовск, с.ш. № 1, 11 кл.

Казахстан

по математике

Порошенко Евгений — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.,
Солодушкин Андрей — Степногорск, с.ш. № 5, 11 кл.;

по физике

Иконов Баур — Алма-Ата, ФМЛ, 11 кл.,
Койчубаев Бахыт — Алма-Ата, ФМЛ, 11 кл.,
Пфлюк Сергей — Алма-Ата, ФМЛ, 11 кл.,
Рогачев Николай — Алма-Ата, ФМЛ, 11 кл.

Узбекистан

по математике

Собиров Зариф — с.ш. № 45 Хозораспского р-на Хорезмской обл., 11 кл.;

по физике

Аллоберганов Мурод — Ургенч, ФХМШ, 11 кл.,
Исмоилов Шукурулло — Ургенч, с.ш. № 20, 11 кл.,
Нурматов Кудрат — Наманган, с.ш. № 7, 10 кл.

Беларусь

по физике

Серафимович Андрей — Борисов, гимназия № 1, 11 кл.,
Ващилко Александр — Барановичи, школа-лицей № 22, 11 кл.

Азербайджан

по математике

Ахмедов Анар — Баку, с.ш. № 58, 11 кл.

Литва

по физике

Лазаускас Римантас — Вильнюс, лицей технических наук, 11 кл.

Высоких результатов в решении задач «Задачника «Кванта» добились также следующие школьники (в этот список вошли победители конкурса, имеющие право участвовать сразу в заключительных турах олимпиад как призеры прошлогодних олимпиад, учащиеся школ и городов, выставляющих свои собственные команды, а также те, кто не вошли в первый список из-за ограниченности числа предоставленных нам мест):

по математике

Бурыкина Наталья — Киев, школа-лицей № 145, 11 кл., Гольнский Александр — Москва, СУНЦ МГУ, 10 кл., *Левин Петр — Москва, с.ш. № 503, 11 кл., Насыпаный Богдан — Гайворон, с.ш. № 5, 11 кл.,* Сапрыкин Сергей — Одесса, Ришельевский лицей, 11 кл., Шныр Андрей — Львов, ФМЛ, 11 кл., Яковлев Евгений — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.;

по физике

Грищенко Сергей — Барнаул, школа-гимназия № 123, 10 кл., Левин Петр — Москва, с.ш. № 503, 11 кл., Матусевич Владислав — Минск, гимназия № 1, 10 кл., *Мушин Вадим — Кузнецовск, с.ш. № 1, 9 кл.,* Отожонов Химидулло — Ургенч, с.ш. № 20, 11 кл., Синицын Николай — Минск, МССШ при БГУ, 10 кл., Смирнов Дмитрий — Кузнецовск, с.ш. № 1, 9 кл., *Хапков Руслан* — Старый Оскол, с.ш. № 16, 10 кл., Химич Максим — Кузнецовск, с.ш. № 1, 10 кл., Ширяев Иван — Кузнецовск, с.ш. № 1, 9 кл., Шпырко Олег — Киев, с.ш. № 206, 11 кл.

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3/4 — 93» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1386» или «Ф1393». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1386 — М1390 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде.

ЗАДАЧИ М1386 — М1390

М1386. Клетки квадрата 7×7 раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется по крайней мере 21 прямоугольник с вершинами в центрах клеток одного цвета и со сторонами, параллельными сторонам квадрата.

И.Рубанов

М1387. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B. Луч OX пересекает эту окружность в двух точках C и D так, что $OC = CD = 1$. Если M — точка пересечения луча OX и отрезка AB, то чему равна длина отрезка OM?

Д.Фомин

М1388. Даны различные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$. При каких x выполнено равенство $f(x) = g(x)$?

А.Перлин

М1389. Во взводе национальной гвардии служат сержанты и рядовые, причем каждый рядовой подчинен одному или двум сержантам. Докажите, что можно уволить в запас не более половины взвода так, что каждым оставшимся рядовым будет командовать ровно один сержант.

А.Перлин

М1390*. На плоскости расположены несколько единичных кругов. Верно ли, что всегда можно отметить несколько точек так, что внутри каждого круга будет находиться ровно одна отмеченная точка?

Д.Фомин

ЗАДАЧИ Ф1393 – Ф1397

Ф1393. Оцените минимальный размер округлого астероида, который не сможет покинуть космонавт, подпрыгнув изо всех сил.

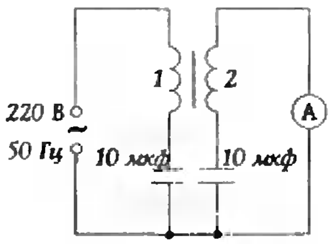
Г.Меледин

Ф1394. Наливая в стакан молоко, вы пролили часть его на клеенку и обнаружили, что под слоем молока еле заметен рисунок клеенки. Полагая, что молоко представляет собой взвесь маленьких шариков жира в воде, оцените размер этих шариков.

П.Зубков

Ф1395. На расстоянии R от заряда $+Q$ расположен шарик массой M, на котором сосредоточен заряд $-Q$. Система помещена в однородное магнитное поле, линии магнитной индукции которого перпендикулярны отрезку, соединяющему заряды. После того как шарик отпустили, он начал двигаться, причем минимальное расстояние между ним и неподвижным зарядом составило $R/2$. Определите величину индукции магнитного поля.

Д.Островский



Ф1396. Какой ток покажет амперметр в цепи, изображенной на рисунке, если число витков во вторичной обмотке трансформатора в два раза больше, чем в первичной? Считайте, что обмотки содержат очень много витков и намотаны на тороидальный сердечник из материала с большой магнитной проницаемостью. Рассеяние магнитного потока пренебрежимо мало, сопротивление обмоток постоянному току равно нулю. Амперметр — идеальный.

З.Рафаилов

Ф1397. Цилиндр радиусом $R = 5$ см составлен из двух одинаковых полуцилиндров, изготовленных из стекла с коэффициентом преломления $n = 2$. Полуцилиндры соприкасаются своими плоскими поверхностями. Не отрывая плоскостей друг от друга, один из полуцилиндров поворачивают так, что угол между осевыми линиями половинок составляет $90°$. Тонкий параллельный световой пучок направляют снаружи на выпуклую поверхность одного из полуцилиндров перпендикулярно плоскости соприкосновения половинок, причем продолжение пучка проходит через точку пересечения осей. Каким будет пучок на выходе из стекла? Во сколько раз увеличится его площадь поперечного сечения на расстоянии $l = 1$ м от системы?

А.Зильберман

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ М1344, М1361–М1365, Ф1373–Ф1377

М1344.[1] *Том Сойер красит забор, состоящий из бесконечной последовательности прямоугольных досок разной ширины и высоты. Каждая доска на 1% уже, чем предыдущая, и выше нее, но не выше 2 м. Том начинает с первой доски и затем, если доска выше предыдущей более чем на 2%, красит ее, а в противном случае — пропускает. Может ли забор быть таким, что он покрасит не менее: а) 40%, б) 50%, в) 60% площади забора?*

Пусть a_n — высота, b_n — ширина n-й доски; $n = 1,2,\ldots$ Положим

$q = 0{,}99$, $p = 1/(0{,}99 \cdot 1{,}02) = 1/1{,}0098$.

По условию, $b_n = b_1 q^n$, $a_n \le 2$; доска будет окрашена, если отношение площади предшествующей доски к ее площади меньше p.

Заметим, что несмотря на бесконечность количества досок, длина и площадь забора конечны: его длина равна сумме бесконечно убывающей прогрессии

$b_1(1+q+\ldots+q^n+\ldots) = b_1/(1-q)$,

а площадь не превосходит $2b_1/(1-q)$.

Мы не только ответим на вопрос задачи, но и найдем точную оценку сверху доли окрашенной площади забора. Пусть забор таков, что первые N досок окрашены, а за ними идут неокрашенные доски высотой $a_N = a$, N — достаточно большое число (см. рисунок). Площадь неокрашенных досок равна

$D = a(q+q^2+\ldots) = aq/(1-q)$,

а площадь окрашенных может быть сколь угодно близка к

$C = a(1+p+p^2+\ldots) = a/(1-p)$.

Поскольку

$$\frac{C}{D} = \frac{1-q}{(1-p)q} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}99 \cdot 1{,}02}{0{,}0098 \cdot 0{,}99} = \frac{1{,}02}{0{,}98} = \frac{51}{49},$$

этот пример показывает, что доля окрашенных досок может составлять почти 51% (и быть сколь угодно близкой к этому числу); нетрудно видеть, что эта доля может быть и любым меньшим числом.

Докажем, что она не может быть равной или большей 51%.

Обозначим через S общую площадь забора, C — площадь окрашенных досок, $D = S - C$ — площадь неокрашенных. Будем называть отмеченными доски, предшествующие неокрашенным.

Пусть n-я доска отмечена; тогда $(n+1)$-я не окрашена, и

$a_n b_n \le a_{n+1} b_n = a_{n+1} b_{n+1}/q$.

Поэтому общая площадь отмеченных досок не больше D/q.

Пусть теперь n-я доска не отмечена; тогда $(n+1)$-я окрашена, и

$a_n b_n \le p a_{n+1} b_{n+1}$.

Поэтому площадь всех неотмеченных досок не превосходит

[1] *Срок решения этой задачи был продлен до 1 декабря 1992 года, поэтому ее решение мы публикуем только сейчас.*

дит pC. Складывая площади всех — отмеченных и не отмеченных — досок, получим:

$S = pC + D/q$,

откуда, заменив S на $C + D$, получим

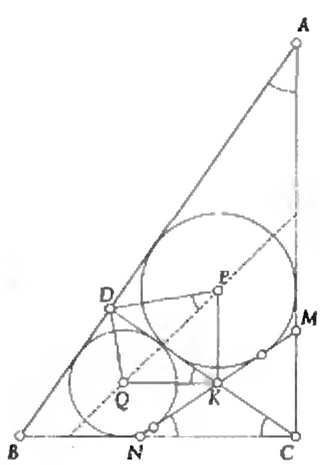
$C(1-p) \le D(1/q - 1) = D(1-q)/q$, т.е.

$$\frac{C}{D} \le \frac{1-q}{q(1-p)} = \frac{51}{49}.$$

Итак, ответы на вопросы а) и б) задачи положительны, на вопрос в) — отрицателен.

А.Григорян

М1361. *Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает стороны AC и BC соответственно в точках M и N, а высоту CD — в точке K. Докажите, что а) треугольники CMN и ABC подобны; б) точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности с центром K, радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.*



Рассмотрим четырехугольник $KPDQ$ (см. рисунок). Так как KP и KQ — биссектрисы смежных углов, то $\angle PKQ = 90°$. Точно так же $\angle PDQ = 90°$. Значит, вершины четырех-угольника $KPDQ$ лежат на окружности с диаметром PQ, и $\angle KPQ = \angle KDQ = 45°$. Отсюда следует, что треугольник KPQ — равнобедренный.

Треугольники ACD и BCD подобны с коэффициентом AC/BC, поэтому

$$\frac{DP}{DQ} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{AC}{BC}.$$

Следовательно, прямоугольный треугольник DPQ подобен треугольнику ABC и $\angle QPD = \angle A$. Обозначим этот угол через α.

Теперь легко показать, что все углы, отмеченные на рисунке одной дугой, равны α: из подобия треугольников ABC и BCD следует, что $\angle BCD = \angle A = \alpha$; по свойству вписанных углов $\angle QKD = \alpha$; значит, $KQ \parallel BC$ (аналогично, $KP \parallel BC$). Теперь ясно, что $\angle CMN = \angle QKD = \alpha$. Полученный результат позволяет сделать следующие выводы:

1) треугольники CMN и ABC подобны;

2) $CK = KM = KN$.

Кроме того, $CK = KQ$, так как $KQ \parallel AC$ и CQ — биссектриса угла ACD. Следовательно, точки C, M, N, P, и Q лежат на окружности с центром K. Вычислим радиус этой окружности. Из треугольника DPQ по теореме Пифагора имеем

$$PQ = \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)}.$$

Но $r_1^2 + r_2^2 = r^2$

(сумма квадратов любых соответствующих друг другу отрезков треугольников ACD и CBD равна квадрату соответствующего им отрезка треугольника ABC — ведь они ему подобны, причем сумма квадратов коэффициентов подобия равна 1). Отсюда получаем

$PQ = r\sqrt{2}$ и $KP = KQ = r$.

Э.Готман

М1362. Докажите, что если натуральное число a взаимно просто с 10, то для любого М найдется n, для которого сумма цифр числа a^n больше М (другими словами, сумма цифр числа a^n не ограничена).

Предварительно докажем такую полезную лемму: *если b и c взаимно простые целые числа, то существует такое натуральное число m, что $b^m - 1$ делится на c.*

Разделим на c с остатком последовательные степени b:

$b = cq_1 + r_1$,

$b^2 = cq_2 + r_2$,

$b^3 = cq_3 + r_3$

и т.д.; здесь $0 < r_i < c$, $i = 1, 2, \ldots, c$.

Так как количество остатков равно c и $0 < r_i < c$, то существуют два равных остатка; пусть $r_k = r_{k+m}$, тогда $b^{k+m} - b^k = b^k(b^m - 1)$ делится на c. Но поскольку b и c взаимно просты, значит, $b^m - 1$ делится на c.

Перейдем к решению задачи. Предположим противное, т.е. что найдется такое число a, взаимно простое с 10, что сумма цифр числа a^n (при всех n) ограничена. Тогда существует такое натуральное число N, что сумма цифр числа a^n принимает наибольшее значение при $n = N$. (Если таких n больше одного, в качестве N возьмем наименьшее из них.) Пусть a^N есть k-значное число. Поскольку a и 10 взаимно просты, по лемме существует такое натуральное число m, что $a^m - 1 = 10^k \cdot Q$.

Тогда

$$a^N(a^m - 1) + a^N = a^{N+m},$$

или

$$a^N \cdot 10^k \cdot Q + a^N = a^{N+m}.$$

Из последнего равенства следует, что сумма цифр числа a^{N+m} больше, чем сумма цифр числа a^N. Противоречие.

С.Керопян

М1363. Можно ли n раз рассадить 2n + 1 человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза, если а) n = 5? б) n = 4? в) n — произвольное натуральное число?

Ответ: можно.

а) На рисунке 1, *а* — *д* показано, как можно требуемым образом 5 раз рассадить 11 человек, занумерованных числами 1,2,...,11. Для k-го ($k = 1,\ldots,11$) человека соседом слева при i-ом ($i = 1,\ldots,5$) рассаживании является человек с номером $k + i$ (если $k + i \le 11$) или с номером $k + i - 11$ (если $k + i > 11$). Такой способ рассаживания не проходит, однако, в случае, когда число $2n + 1$ составное.

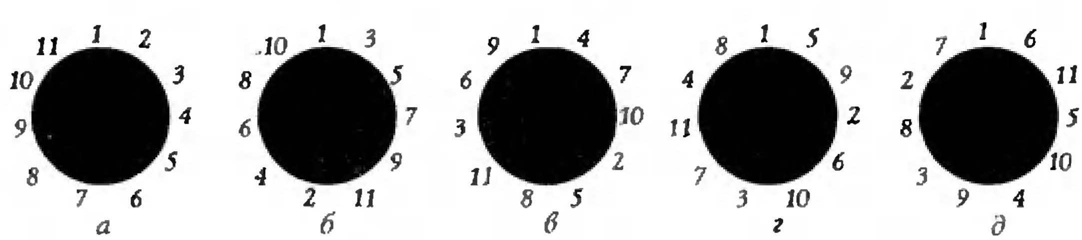


Рисунок 1

б), в). Множество всех сторон и диагоналей выпуклого $2n$-угольника можно представить как объединение n ломаных таких, что каждая из них проходит через все $2n$ вершин и никакие две ломаные не имеют общих звеньев. (На языке теории графов этот факт звучит так: полный $2n$-вершинный граф распадается на n гамильтоновых цепей.)
Для $n = 4$ четыре такие ломаные показаны на рисунке 2, *а* — *г*. Их мы и используем в качестве схем для рассаживаний 9 человек за круглым столом. Так, при первом рассаживании слева от номера 1 расположим последовательно номера 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5 (согласно рисунку 2, *а*), а номер 9 поместим между 5 и 1. Аналогично проводятся второе, третье и четвертое рассаживания согласно рисункам 2, *б*, *в*

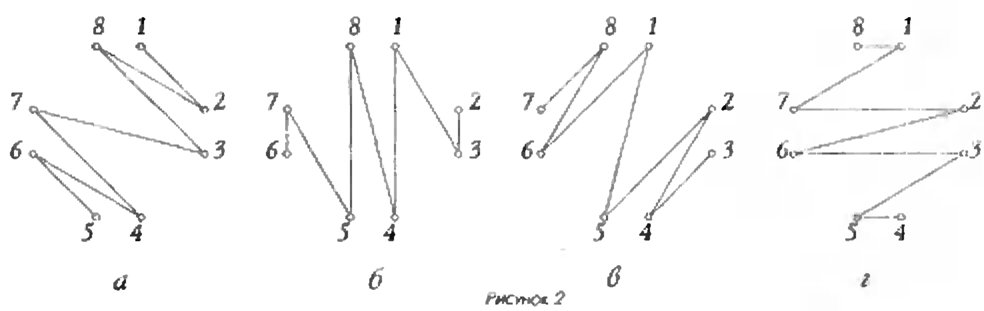


Рисунок 2

и *г* соответственно; номер 9 всякий раз помещается между номерами, стоящими на концах соответствующей ломаной. Пусть теперь n — произвольное натуральное число и $A_1A_2...A_{2n}$ — правильный $2n$-угольник. Можно считать, что i-я ($i = 1,..., n$) ломаная включает в себя сторону A_iA_{i+1}, все параллельные ей диагонали, сторону $A_{n+i}A_{n+i+1}$ ($A_{2n}A_1$ при $i = n$) и все диагонали, перпендикулярные прямой A_iA_{n+i}. Эти ломаные и задают схемы нужных нам n рассаживаний (человека с номером $2n + 1$ всякий раз будем сажать между людьми с номерами i и $n + i$).

С.Токарев

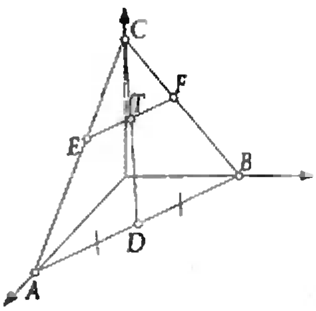
M1364. *Пусть* $a + b + c = 1$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$. *Докажите неравенства*

а) $4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 15abc \ge 1$,

б) $a^3 + b^3 + c^3 + abcd \ge \min\left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{9} + \frac{d}{27}\right\}$

(здесь $\min\{x; y\}$ *— наименьшее из чисел x, y).*

Поскольку неравенство пункта а) получается из общего неравенства пункта б) при $d = 15/4$, приведем решение пункта б).
Множество точек пространства, координаты (a, b, c) которых неотрицательны и $a + b + c = 1$, — треугольник ABC с вершинами $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ (см. рисунок).
Пусть $f_d(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + abcd$.
Зафиксируем одну из координат (например, положим, что $c = c_0$) и рассмотрим значения этой функции на отрезке EF, параллельном стороне AB треугольника ABC. Поскольку $a + b = 1 - c$, для точек этого отрезка



$$f_d(a,b,c) = f_d(a,1-a-c_0,c_0) =$$
$$= a^3 + (1-a-c_0)^3 + c_0^3 + a(1-a-c_0)c_0 d.$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве, получим

$$f_d(a,1-a-c_0,c_0) = ka^2 + la + m = g(a),$$

где k, l, m как-то выражаются через c_0 и d, причем

$$0 \le a \le \frac{n}{\sqrt{2}},$$

где n — длина отрезка EF.

Кроме того, из очевидного равенства

$$f_d(a,b,c) = f_d(b,a,c)$$

следует, что

$$g(a) = g\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - a\right).$$

Отсюда получаем, что абсцисса вершины квадратного трехчлена $g(a)$ равна $\frac{n}{2\sqrt{2}}$.

Таким образом, минимум функции $f_d(a,b,c)$ достигается, причем он может достигаться лишь в следующих точках: для каждого отрезка, проведенного через точку X параллельно любой из сторон треугольника ABC, концы Y и Z которого лежат на двух других сторонах этого треугольника, точка X совпадает либо с серединой отрезка YZ, либо с одним из его концов. Очевидно, этим свойством обладают лишь семь точек: вершины треугольника ABC, середины его сторон и его центр. Но

$$f_d(1,0,0) = f_d(0,1,0) = f_d(0,0,1) = 1,$$

$$f_d\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = f_d\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) = f_d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{4},$$

$$f_d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{d}{27}.$$

Отсюда следует неравенство задачи.

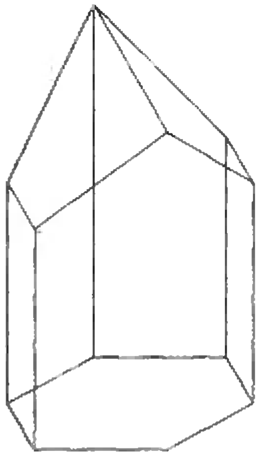
В.Сендеров

***М1365.** Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с четным числом сторон. Обязательно ли его ребра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну ребер разных цветов?*

Ответ: нет.

Пусть M — многогранник, ребра которого покрашены требуемым образом. Докажем, что число ребер у M четно. В самом деле, если i-м ($i = 1, 2$) цветом покрашено x_i ребер, то суммарное (по всем граням) число сторон этого цвета равно $2x_i$ (поскольку каждое ребро служит стороной ровно двум граням). А так как у каждой грани сторон разных цветов поровну, то $2x_1 = 2x_2$, т.е. $x_1 = x_2$ и общее число ребер $x_1 + x_2$ четно.

Ответ на вопрос задачи отрицательный, поскольку можно привести пример многогранника, число сторон каж-



дой грани которого четно, а общее число ребер нечетно. На рисунке показан девятигранник, имеющий 19 ребер и ограниченный одной шестиугольной и восемью четырехугольными гранями. (Такой девятигранник получится, если от шестиугольной призмы отсечь две части, расположенные «выше» плоскостей, проходящих через одну из больших диагоналей верхнего основания и пересекающих по три боковые грани.)

С.Токарев

Ф1373. *Однородная длинная пружина состоит из большого числа одинаковых витков и имеет в недеформированном состоянии длину L. Пружину поставили вертикально внутрь высокого цилиндра с гладкими стенками, при этом длина пружины уменьшилась в два раза. Затем в цилиндр налили воду до уровня, равного $L/2$. Какой стала длина пружины в этом случае? Плотность материала пружины ρ, плотность воды ρ_0.*

Пусть пружина состоит из N витков (по условию $N \gg 1$). Рассмотрим вначале сжатие пружины под действием собственного веса в отсутствие воды. На виток номер j (считая сверху) давят верхние $j-1$ витков. Изменение его длины определяется силой $Mg\,(j-1)/N$, где M — масса пружины, и жесткостью этого витка — она в N раз больше жесткости k всей пружины. Суммарное «укорочение» пружины равно сумме изменений длин ее витков:

$$\Delta L = \sum_{j=1}^{N} \Delta L_j = Mg/(2k) = L/2,$$

откуда получаем

$$Mg/k = L.$$

Теперь рассмотрим случай, когда вода доходит до уровня $L/2$. Если при этом под водой оказались n витков, то $N-n$ витков будут торчать из воды. Будем искать величину n/N. Мы можем записать нагрузку для каждого из подводных витков, найти изменение его длины, просуммировать эти изменения и приравнять сумму к величине $Ln/N - L/2$ (это разность между длиной n витков в недеформированном состоянии и в конечном результате). Еще нужно учесть, что витки, которые погружены в воду, за счет действия на них силы Архимеда весят меньше — такой виток давит на нижние силой

$$Mg\,(\rho-\rho_0)/(\rho N) = \alpha Mg/N.$$

Итак, сила, сжимающая виток номер $i+1$ (считая вниз от границы воды), равна

$$F_i = Mg\,(N-n)/N + \alpha Mgi/N,$$

а сумма изменений длин подводных витков —

$$\sum_{i=0}^{n} F_i/(kN) = Mgn\,(N-n)/(kN^2) +$$

$$+\,\alpha Mgn^2/(2kN^2) = L(n/N - 1/2).$$

Вводя обозначение $n/N = x$ и используя соотношение $Mg/k = L$, получим относительно x уравнение

$$x(1-x) + \alpha x^2/2 = x - 1/2,$$

откуда

$$x = 1/\sqrt{2-\alpha}.$$

Теперь уже легко получить длину всей пружины, прибавив к длине $L/2$ подводной ее части длину деформированных $N - n$ витков надводной части:

$$L^* = L/2 + L(1-x) - L(1-x)^2/2 = L(1-x^2/2),$$

или

$$L^* = L(3-2\alpha)/(2(2-\alpha)), \text{ где } \alpha = (\rho-\rho_0)/\rho.$$

С.Кротов

Ф1374. *Два сосуда объемом $V = 0,5$ л каждый соединены вертикальной стеклянной трубкой сечением $S = 1$ см^2 (рис. 1). Трубка перекрыта подвижным поршнем-магнитом массой $m = 2,0$ г, который может двигаться вдоль трубки без трения. При помощи катушек, подключенных к генератору переменного напряжения, возбуждают колебания поршня вдоль трубки. На рисунке 2 приведена экспериментально полученная зависимость амплитуды установившихся колебаний поршня от частоты приложенного переменного напряжения. Определите по этим данным отношение молярных теплоемкостей C_p/C_V для воздуха.*

В первом опыте вентиль наверху был закрыт. При какой частоте наступит

Для решения этой задачи нужно воспользоваться уравнением адиабаты, связывающим давление и объем газа соотношением

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где $\gamma = C_p/C_V$ — отношение молярных теплоемкостей газа при изобарном и изохорном процессах соответственно. Отсюда для малых изменений давления и объема получаем

$$\Delta p = -\gamma p\,\Delta V/V.$$

При малом смещении поршня давление в одном сосуде увеличивается, а в другом уменьшается. Начальные объемы сосудов одинаковы, давления в них практически тоже были одинаковыми (чтобы уравновесить поршень, нужна совсем небольшая — по сравнению с начальным давлением — добавка). Тогда полную силу, действующую на поршень при его малом смещении x, можно записать в виде

$$F = 2\Delta pS = -2\gamma p_0 SxS/V = -2\gamma p_0 S^2 x/V.$$

Эта «возвращающая» сила пропорциональна смещению поршня от положения равновесия — значит, поршень будет колебаться по гармоническому закону (глядя на довольно острую резонансную кривую, можно предположить, что затухание колебаний получается небольшим и его влиянием на частоту резонанса можно пренебречь). Тогда для резонансной частоты колебаний получаем

$$\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = 2\gamma p_0 S^2/(mV),$$

откуда

максимум при открытом вентиле? Оцените амплитуду колебаний поршня в этом случае на частоте f_0. Давление воздуха $p_0 = 1$ атм.

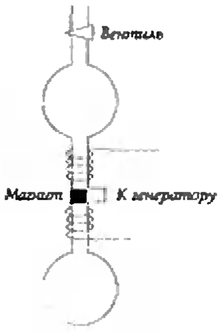


Рисунок 1

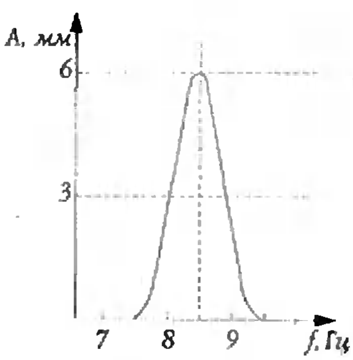


Рисунок 2

$\gamma = 2mV\pi^2 f_0^2/(p_0 S^2) = 1,4.$

Это вполне соответствует теоретическому значению для двухатомного газа $\gamma = 7/5 = 1,4$.

Если открыть вентиль в одном из сосудов, давление в нем меняться не будет и величина возвращающей силы уменьшится в 2 раза. При этом частота резонанса уменьшится в $\sqrt{2}$ раз и составит $f \approx 6$ Гц.

Амплитуду колебаний на частоте $f_0 = 8,5$ Гц в новых условиях можно оценить по тому же графику (см. рис. 2), если сместиться от резонанса на

$\Delta f = (f_0 - f)f_0/f \approx 3,5$ Гц.

Амплитуда — судя по графику — будет совсем малой.

А.Зильберман

Ф1375*. *Пленка при температуре $t_1 = +50\,°C$ имеет коэффициент поверхностного натяжения $\sigma_1 = 0,020$ Н/м. После увеличения температуры до $t_2 = +51\,°C$ коэффициент поверхностного натяжения падает до $\sigma_2 = 0,0195$ Н/м. Будем медленно растягивать пленку так, чтобы ее температура оставалась постоянной. Поглощает пленка при этом тепло из окружающей среды или, наоборот, отдает его? Оцените количественно этот теплообмен при растяжении пленки от*

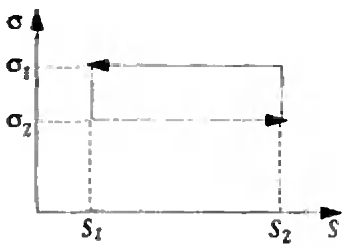
Из энергетического баланса следует, что при растяжении пленка должна отнимать тепло у окружающей среды — без теплообмена она при растяжении остывает. Для расчетов используем следующий метод. Проведем с нашей пленкой замкнутый процесс, причем растягивать ее мы будем изотермически при температуре $T_н = 324$ К (это $+51\,°C$), а сжиматься она будет тоже изотермически при температуре $T_х = 323$ К. Переход от одной температуры к другой будем производить без теплообмена с окружающей средой, т.е. адиабатически. Получившийся цикл — это просто цикл Карно, формула его КПД хорошо известна:

$\eta = A/Q_н = (T_н - T_х)/T_н$.

Этой формулой мы и воспользуемся для расчета полученного количества теплоты, поскольку работу в цикле мы найти сумеем. Такой способ определения тепловых величин называется методом циклов.

Для изображения цикла используем необычные оси — по вертикальной оси будем откладывать коэффициент поверхностного натяжения, который зависит от температуры, а по горизонтальной оси отложим площадь

$S_1 = 1$ м^2 до $S_2 = 1{,}5$ м^2 при температуре $+50\,^\circ$C.
Указание. Подумайте, как применить тут формулу для КПД цикла Карно.



пленки. Тогда площадь под кривой равна по величине работе по растяжению пленки. В нашем случае изотермическое растяжение изображается отрезком горизонтальной прямой, а адиабатический процесс — маленьким отрезком, идущим примерно вертикально (впрочем, это неважно — главное, что он совсем мал, поскольку мало относительное изменение температуры: $\Delta T/T = 1/323$). Таким образом, наш цикл представляет собой параллелограмм (см. рисунок).

При растяжении работа пленки отрицательна — это мы совершаем над ней положительную работу, а при сжатии ее работа положительна. Полная работа в таком цикле равна площади под графиком, т.е. площади параллелограмма, длина основания которого равна $\Delta S = S_2 - S_1 = 0{,}5$ м^2, а высота — $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = 0{,}0005$ Н/м. Теперь можно найти полученное при растяжении пленки количество теплоты:

$$Q = AT_н/(T_н - T_х) = (\Delta\sigma\Delta S)T_н/(T_н - T_х) = 0{,}08 \text{ Дж}.$$

А.Зильберман

Ф1376. *При исследовании «черного ящика» с тремя выводами (рис. 1) были измерены его сопротивления: $R_{АБ} = 300$ Ом, $R_{БВ} \approx R_{АВ} \approx 120$ кОм. Что можно сказать о схеме их соединения и о величинах их сопротивлений, основываясь на приведенных результатах? Какие измерения еще нужно провести, чтобы определить сопротивления резисторов в «ящике»? В вашем распоряжении батарейка напряжением 4,5 В и авометр «Школьный».*

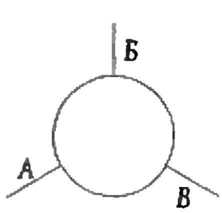


Рисунок 1

По данным измерений можно предложить множество схем. Если ограничиться простейшими (а они содержат именно три резистора — меньше не получится), то у нас есть выбор между двумя эквивалентными схемами — «треугольником» и «звездой» (рис. 2).

В схеме а) сопротивление резистора, включенного между точками $А$ и $Б$, составляет примерно 300 Ом, а про R_1 и R_2 известно, что при параллельном соединении они дают ≈ 120 кОм (там есть еще сопротивление 300 Ом, но его влияние несущественно). Про схему б) известно, что к точке $В$ подключен резистор сопротивлением 120 кОм, а про r_1 и r_2 мы знаем лишь, что их сумма составляет 300 Ом. Больше мы не можем сказать ничего — тех данных, которые приведены в условии задачи, недостаточно. Для того чтобы найти величины сопротивлений всех резисторов, нужно провести дополнительные измерения. Лучше всего поступить так: между точками $А$ и $Б$ подключить батарейку, а вольтметром измерить напряжение между точками $А$ и $В$, а также $Б$ и $В$. При этом отношение показаний вольтметра будет равно отношению сопротивлений, величины которых мы хотим определить. Очень интересно, что этот результат не зависит от величины сопротивления вольтметра — попробуйте доказать это самостоятельно. Поэтому вместо вольтметра можно использовать микроамперметр — подключить авометр как микроамперметр на самом чувствительном пределе,

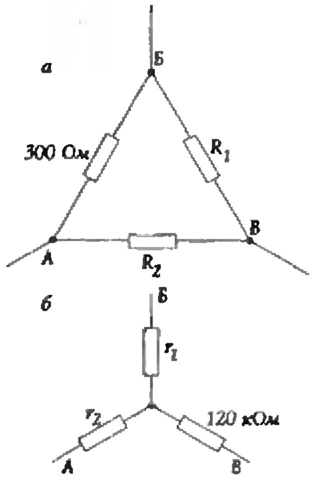
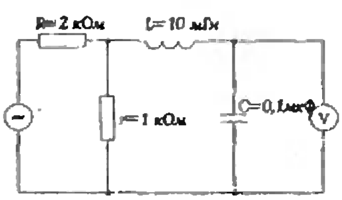


Рисунок 2

при этом точность измерений окажется выше, а большие сопротивления внутри «ящика» ограничат величину тока до безопасных для микроамперметра пределов.

А.Зильберман

Ф1377. *Для исследования резонанса собрана схема, показанная на рисунке. При какой частоте генератора вольтметр дает максимальные показания? Чему равно это максимальное напряжение, если амплитуда напряжения генератора $U_0 = 1$ В? Как изменятся максимальные показания вольтметра при уменьшении сопротивления r от 1 кОм до 100 Ом? Все элементы схемы можно считать идеальными.*



Для существенного упрощения вычислений удобно генератор переменного напряжения и два подключенных к нему резистора заменить так называемым эквивалентным источником с амплитудой выходного напряжения $U_m = U_0 r/(R+r)$ и внутренним сопротивлением $Z = Rr/(R+r)$. (Эквивалентность такой замены попробуйте доказать самостоятельно.)

Теперь схема получилась совсем простой, и амплитуду напряжения на конденсаторе можно легко записать:

$$U_C = \frac{U_m Z_C}{Z_{\text{общ}}} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{Z^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}.$$

Исследуем полученную функцию частоты ω на максимум. Для этого рассмотрим знаменатель, а лучше — квадрат знаменателя, и выясним, при каком значении ω он минимален. Приравняем нулю его производную по частоте:

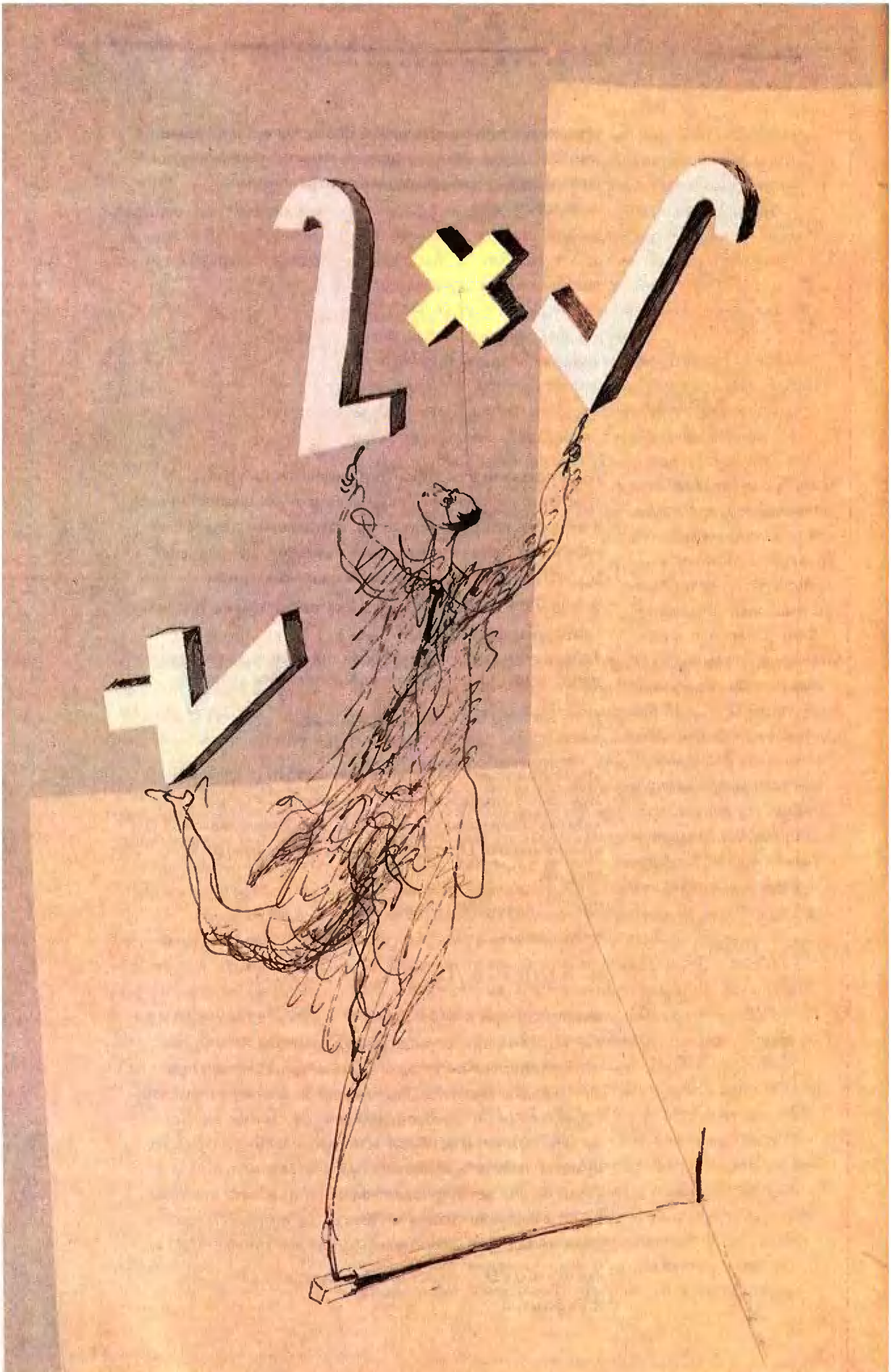
$$2\omega C^2 Z^2 + 4\omega^3 L^2 C^2 - 4\omega LC = 0,$$

откуда найдем

$$\omega^2 = 1/(LC) - Z^2/(2L^2) = \omega_0^2\left(1 - Z^2 C/(2L)\right).$$

Видно, что при $R = 2$ кОм и $r = 1$ кОм $Z = 667$ кОм и под корнем стоит отрицательная величина. Это значит, что функция не имеет максимумов и минимумов при $\omega > 0$ и максимальное напряжение вольтметра получается либо на очень высокой, либо на совсем низкой частоте. В нашем первом случае ясно, что максимум будет на нулевой частоте и вольтметр будет показывать 0,33 В (если он сможет нормально функционировать при измерениях на очень низких частотах). Во втором случае показания будут максимальными на частоте $\omega = 0{,}95\,\omega_0$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, и составят примерно 0,15 В.

З.Рафаилов



Необыкновенные арифметики

Андрей Егоров
Анна Котова

По всей вероятности, некоторые из вас удивятся (и даже возмутятся) при виде таких равенств: $2 \cdot 2 = 1$, $2 \cdot 5 = 3$, $3 \cdot 2 = 0$ и т.д.

Однако ничего загадочного (и тем более неверного) в них нет. Дело в том, что знаки умножения и равенства означают здесь не совсем то, чему учат в школе.

Арифметика цифр

Начнем с примера. Рассмотрим цифры 0, 1, ..., 9. *Суммой (произведением)* двух цифр назовем последнюю цифру их суммы (произведения). Тогда

$$2 + 5 = 7,\ \ 7 + 6 = 3,\ \ 5 + 5 = 0,$$
$$7 \cdot 7 = 9,\ \ 2 \cdot 5 = 0,\ \ 8 \cdot 8 = 4.$$

Такие арифметические действия ничуть не хуже привычных вам сложения и умножения обычных целых чисел. В самом деле, для любых цифр a, b и c очевидно верны следующие свойства:

1. $a + b = b + a$;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. $a + 0 = a$;
4. для любой цифры a существует цифра $(-a)$ такая, что $a + (-a) = 0$ (например, $-4 = 6$, $-5 = 5$, $-1 = 9$);
5. $ab = ba$;
6. $a(bc) = (ab)c$;
7. $a \cdot 1 = a$;
8. $a(b + c) = ab + ac$.

Справедливость этих свойств немедленно следует из аналогичных свойств действий над целыми числами. Сразу видно, что цифры можно не только складывать, но и вычитать, положив по определению, что

$$a - b = a + (-b).$$

Например,

$$2 - 7 = 2 + (-7) = 2 + 3 = 5,$$
$$4 - 6 = 4 + (-6) = 4 + 4 = 8$$

и т.д.

Рассматривая таблицы сложения и умножения для наших цифр (см. рисунок 1; здесь в каждом пересечении строк и столбцов стоят суммы (соответственно, произведения) цифр, с которых эти строки и столбцы начинаются), мы сразу замечаем и резкое отличие «новой» арифметики от старой. Произведение двух ненулевых цифр может быть равно нулю!

Графика Леонида Тишкова

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

а

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

б

Рисунок 1

В таких случаях говорят, что в арифметике имеются делители нуля, т.е. такие числа $a \neq 0$ и $b \neq 0$, что $ab = 0$.

Упражнения

1. Найдите последнюю цифру числа а) 7^{1993}, б) $2^{7^{1993}}$, в) 3^{1993}.

2. Докажите, что произведение двух последних цифр квадрата целого числа четно.

3. Решите в арифметике цифр уравнение $x^2 - 1 = 0$.

Арифметика остатков по модулю m

Построенная нами арифметика цифр допускает естественное обобщение.

Пусть $m > 1$ — произвольное натуральное число. Каждое целое число при делении на m дает некоторый остаток, причем разных остатков ровно m; это числа

$$0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

В частности, цифры — это полный комплект остатков от деления на 10. (Заметим попутно, что остаток от деления на m — последняя цифра числа, представленного в m-ичной системе счисления.)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Рисунок 2

Введем на множестве остатков от деления на m действия сложения и умножения так же, как мы это делали раньше. *Суммой* (соответственно, *произведением*) двух остатков a и b назовем остаток от деления на m обычной суммы (произведения) чисел a и b.

Совершенно очевидно, что все восемь свойств, отмеченных нами для сложения и умножения цифр, справедливы и для действий над остатками. Разумеется, в арифметике остатков есть и операция вычитания, определяемая как и раньше: $a - b = a + (-b)$.

Арифметику остатков от деления на m (*по модулю* m) принято обозначать $\mathbf{Z}_m$.

На рисунке 2 приведены таблицы умножения для двух арифметик остатков: по модулю 5 и по модулю 6 (поскольку во всех арифметиках остатков свойства таблиц сложения одинаковы, их мы не приводим). Видно, что в $\mathbf{Z}_5$ нет делителей нуля, а в $\mathbf{Z}_6$ они есть. В чем же дело? Понять это вам помогут следующие упражнения.

Упражнения

4. *Постройте таблицы умножения в арифметиках остатков по модулям 7, 8, 9, 11, 12, 13.*

5. *Решите в этих арифметиках уравнения $x^2=1$ и $x^2=-1$ и выясните, при каких целых x числа x^2-1 и x^2+1 делятся на соответствующий модуль.*

6. *Рассмотрите арифметику остатков по модулю 100. Найдите все делители нуля в этой арифметике. Сколько их? Докажите, что если a не является делителем нуля, то $a^{40}=1$. (Отсюда следует, в частности, что если a взаимно просто с числом 100, то $a^{40}-1$ делится на 100.)*

7. *Докажите, что сумма $1+2^{1993}+\ldots+1992^{1993}$ делится на 1993.*

Арифметика остатков по простому модулю

Пусть p — произвольное простое число. Рассмотрим остатки от деления на p:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1.$$

Теорема 1. ***Среди ненулевых остатков по простому модулю p нет делителей нуля.***

Доказательство. Предположим, что найдутся два остатка по модулю p, a и b, такие, что $a\neq 0$, $b\neq 0$, но $ab=0$ в $\mathbf{Z}_p$.

Это значит, что число ab делится на p, т.е. одно из чисел a и b делится на p, что невозможно, поскольку $0<a<p$, $0<b<p$.

Множество всех ненулевых остатков в $\mathbf{Z}_p$ мы будем обозначать $\mathbf{Z}_p^*$.

Из теоремы 1 сразу следует, что если $ab=ac$ и $a\neq 0$, то $b=c$ (убедитесь в этом). Но тогда все элементы из $\mathbf{Z}_p^*$ вида

$$a,\ 2a,\ \ldots,\ (p-1)a$$

различны, и, следовательно, среди них есть ровно один элемент, равный единице. Это значит, что в $\mathbf{Z}_p^*$ существует такой остаток b, для которого

$$ab=1.$$

Будем обозначать его a^{-1} или $1/a$ и называть *обратным к* a элементом $\mathbf{Z}_p^*$.

Очевидно, что если для некоторых двух остатков a и b верно равенство $a^{-1}=b^{-1}$, то $a=b$.

Итак, в арифметике остатков по простому модулю существует операция деления на любой ненулевой элемент, поскольку можно положить $a/b=ab^{-1}$ для всех $b\neq 0$.

Упражнения

8. *Докажите, что*

а) $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$;

б) $(-a)^{-1}=-a^{-1}$;

в) $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$;

г) всякое уравнение $ax=b$, где $a\neq 0$, имеет единственный корень.

9. *Докажите, что для любого простого p число*

$(p-1)!(1+1/2+1/3+\ldots+1/(p-1))$ делится на p.

10. *Докажите, что в $\mathbf{Z}_m$ обратный элемент имеют те и только те остатки, которые не являются делителями нуля (т.е. остатки, взаимно простые с m).*

Теорема Вильсона

Арифметика остатков по простому модулю позволяет доказать такой критерий простоты числа p:

Теорема Вильсона. ***Число p просто тогда и только тогда, когда число $A = (p-1)! + 1$ делится на p.***

Доказательство. Пусть число p простое. Докажем, что в этом случае A делится на p.

Для $p = 2$ утверждение очевидно. Для $p > 2$ заметим, что каждый из остатков от деления на p, не равный нулю, имеет обратный, причем при $a \neq 1$ и $a \neq p-1$ остатки a и a^{-1} различны. В самом деле, если $a^{-1} = a$, то $a^2 - 1 = (a-1)(a+1) = 0$. Но числа $a - 1$ и $a + 1$ не могут делиться на p, поэтому такое равенство невозможно.

Таким образом, все остатки в произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$, кроме 1 и $(p - 1)$, разбиваются на пары взаимно обратных сомножителей, откуда

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) = 1 \cdot (2 \cdot 2^{-1})(3 \cdot 3^{-1}) \times \ldots$$
$$\ldots \times ((p-1)/2 \cdot ((p-1)/2)^{-1})(p-1) =$$
$$= 1 \cdot (p-1) = -1.$$

Итак, в Z_p справедливо равенство $(p-1)! = -1$, т.е. $(p-1)! + 1$ делится на p.

Пусть теперь p — составное, т.е. $p = kd$. Тогда $(p - 1)!$ содержит среди сомножителей число d и имеет вид nd; число $nd + 1$ не делится на d и, следовательно, на p.

К сожалению, этот критерий простоты — красивый, но непрактичный математический факт: для не слишком маленьких чисел его очень трудно проверять. Так, чтобы убедиться в простоте числа 1993, пришлось бы вычислить $1992! + 1$, а потом еще и разделить на 1993...

Упражнения

11. *Докажите, что при $p = 4k + 1$ уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет корни в Z_p.*

12. *Докажите, что числа*

а) $91!\ 1901! - 1$,

б) $92!\ 1990! + 1$

делятся на 1993.

Периодичность степеней

Пусть $a \neq 0$ — остаток из Z_p^*, где p — простое число. Что получится, если возводить a во всевозможные степени: вторую, третью, четвертую и так далее до бесконечности?

Поскольку в Z_p^* всего $p - 1$ элементов, то уже среди первых p членов последовательности $a, a^2, \ldots, a^m, \ldots$ найдутся два равных. Пусть это, например, a^k и a^l; тогда $a^{k-l} = 1$.

Итак, среди степеней остатка a есть единица.

Пусть d — наименьший показатель степени такой, что $a^d = 1$. Ясно, что $d \neq 1$, все степени $a, a^2, \ldots, a^d$ различны и $a^{k+d} = a^k$ для любого целого k, т.е. последовательность степеней остатка a периодична (с периодом d).

Определение. *Такое число d называется порядком остатка a по модулю p и обозначается $d_p(a)$.*

Отметим некоторые важные свойства порядков:

1. если $d_p(a) = d$ и $a^m = 1$, то m делится на d;

2. если $d_p(a) = m$, $m = kl$, то $d_p(a^k) = l$;

3. $d_p(a) = d_p(a^{-1})$;

4. если $d_p(a) = m$, $d_p(b) = n$, то $d_p(ab)$ является делителем наименьшего общего кратного чисел m и n;

5. если $d_p(a) = m$, $d_p(b) = n$ и числа m и n взаимно просты, то $d_p(ab) = mn$.

Упражнения

13. *Докажите самостоятельно свойства 2 и 3.*

14. *Докажите самостоятельно свойство 4 и убедитесь, что $d_p(ab)$ не обязательно равен наименьшему общему кратному m и n.*

Докажем свойство 1. Пусть $a^m = 1$ и m не делится на d, т.е. $m = qd + r$, $0 < r < d$. Тогда

$$1 = a^m = a^{qd+r} = a^{qd}a^r = (a^d)^q a^r = a^r.$$

По определению d — наименьший показатель степени такой, что $a^d = 1$. Но мы нашли число r, меньшее d и обладающее тем же свойством. Противоречие.

Приведем и доказательство свойства 5. Пусть $d_p(ab) = d$. Ясно, что d не превышает mn, поскольку

$$(ab)^{mn} = (a^m)^n (b^n)^m = 1.$$

С другой стороны, так как $(ab)^d = 1$, то $a^d = (b^{-1})^d$, т.е. $a^d = b^d$ (свойство 3). Но тогда $a^{nd} = b^{nd} = 1$, и nd делится на m (свойство 1). Но m и n взаимно просты, поэтому d делится на m. Аналогичное рассуждение показывает, что d делится и на n, т.е. d делится на mn. Но d не больше mn и, следовательно, $d = mn$.

Порядок остатка a в $\mathbf{Z}_p$ называется также *показателем*, которому принадлежит a по модулю p.

Упражнения

15. *Найдите порядок остатка 2 в* $\mathbf{Z}_7, \mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{13}$.

16. *Докажите, что*

а) если $A = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ *делится на 5, то A делится и на 625;*

б) если $a^3 + b^3 + c^3$ *делится на 7, то abc делится на 7;*

в) если $a^2 + b^2$ *делится на 7, то оба числа a и b делятся на 7.*

17. *Докажите, что число* $5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1}$ *делится на 19 при любом натуральном n.*

Функция Эйлера

Пусть m — некоторое натуральное число. Рассмотрим множество всех остатков от деления на m, взаимно простых с m, т.е. множество $\mathbf{Z}_m^*$. Обозначим через $\varphi(m)$ количество элементов в $\mathbf{Z}_m^*$.

Функция $\varphi(m)$, сопоставляющая каждому натуральному числу m количество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с ним, называется *функцией Эйлера.*

В частности, для любого простого числа p

$\varphi(p) = p - 1,$

$\varphi(p^2) = p(p-1),$

....

$\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$

(почему?).

Теорема 2. ***Для любых взаимно простых m и n***

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

(т.е. функция Эйлера мультипликативна).

Доказательство. Чтобы подсчитать количество чисел, меньших mn и взаимно простых с mn, расположим все числа от 1 до mn так, как показано на рисунке 3. В каждой строке получившейся таблицы ровно $\varphi(n)$ чисел, взаимно простых с n, а в каждом столбце — ровно $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m (почему?).

Поскольку m и n взаимно просты, любое число в таблице взаимно просто с mn тогда и только тогда, когда оно взаимно просто и с m, и с n, т.е. когда оно стоит на пе-

1	2	3	...	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$3n$
...	...	...	...	...
$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	$(m-1)n+3$	...	mn

Рисунок 3

ресечении столбца с номером, взаимно простым с n, и строки с номером, взаимно простым с m. Очевидно, что таких чисел ровно столько, сколько клеток в пересечении $\varphi(n)$ столбцов и $\varphi(m)$ строк, т.е. $\varphi(m)\varphi(n)$. Но $\varphi(mn)$ равно количеству таких чисел.

Итак, действительно, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Теперь мы можем вывести формулу для вычисления $\varphi(m)$. Разложим m на простые множители:

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}.$$

Тогда

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}) = \varphi(p_1^{k_1}) \ldots \varphi(p_s^{k_s}),$$

но $p_1, p_2, \ldots, p_s$ простые числа, поэтому

$$\varphi(m) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_2 - 1)\ldots$$

$$\ldots p_s^{k_s-1}(p_s - 1) = p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)p_2^{k_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots$$

$$\ldots p_s^{k_s}\left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Например,

$\varphi(20) = 20(1-1/2)(1-1/5) = 8.$

Упражнения

18. *Докажите, что $\varphi(n)$ четно при $n \neq 2$.*

19. *Найдите $d_{210}(11)$.*

Еще одно замечательное свойство функции Эйлера описывает

Теорема Эйлера. ***Если число a взаимно просто с натуральным числом m, то $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m.***

Доказательство. Выпишем в строчку элементы из Z_m^*:

$1 = a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$.

Поскольку a взаимно просто с m, его остаток $\bar{a}$ от деления на m не равен нулю, т.е. $\bar{a} \in Z_m^*$. Если будет доказано, что $\bar{a}^{\varphi(m)} = 1$ в Z_m^*, будет доказана и теорема Эйлера.

Для этого умножим каждый из элементов Z_m^* на $\bar{a}$; получим новую строчку

$$\bar{a}, \bar{a}a_2, \bar{a}a_3, \ldots, \bar{a}a_{\varphi(m)}.$$

Все остатки в ней различны (почему?), следовательно, мы снова получили полный комплект элементов из Z_m^*, возможно, в другом порядке.

Перемножим их; тогда

$$a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)} = \bar{a}^{\varphi(m)} a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)}.$$

Но произведение $a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)}$ взаимно просто с m, поэтому полученное равенство означает, что $\bar{a}^{\varphi(m)} = 1$, что и требовалось доказать.

Из теоремы Эйлера сразу следует

Малая теорема Ферма. ***Если p — простое число и число a не делится на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p.***

Справедливость этого утверждения становится очевидной, если вспомнить, что $\varphi(p) = p - 1$.

Замечание. Из теоремы Ферма и 1-го свойства порядков вытекает, что $d_p(a)$ является делителем числа $p - 1$ для любого остатка a.

Упражнения

20. *Докажите, что*

а) $2^{131} - 1$ делится на 263;

б) $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2}.

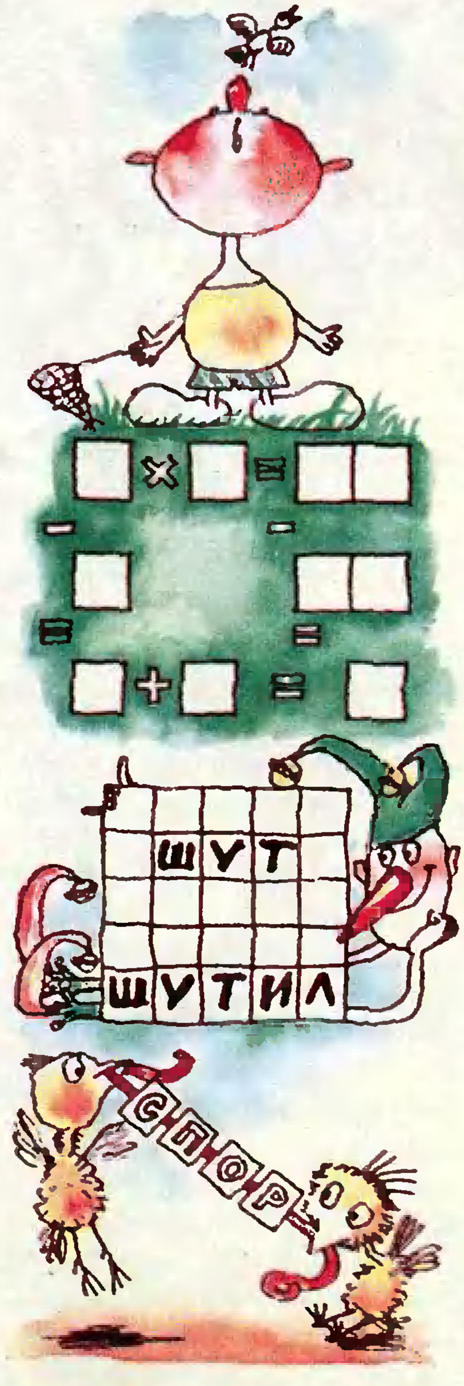
21. *Докажите, что если $x^2 + 1$ ($x > 1$) делится на простое число p, то $p = 4k + 1$.*

22. *Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $p = 4k + 1$.*

23. *При разложении рационального числа p/q (где q взаимно просто с 10, $q > p$) в бесконечную периодическую дробь получился период длиной m. Докажите, что m — делитель числа $\varphi(q)$.*

ЗАДАЧИ

1/*И.Акулич.* Цена одного номера ежемесячного научно-популярного журнала равнялась 1 р. 10 к. и состояла из расходов на гонорары, типографских и почтовых расходов (*прибыли журнал не приносил и не приносит*). Когда типографские расходы возросли в 10 раз, а почтовые в 7 раз, цену пришлось поднять до 7 р. 70 к. Затем, когда типографские расходы возросли еще в 2,25 раза, а почтовые — на 80%, цену подписки было решено не поднимать, а выпускать журнал 1 раз в 2 месяца. Однако, когда типографские расходы возросли еще в 2 раза, а почтовые — в 3 раза, цену пришлось все-таки поднять. *Чему она стала равна?*

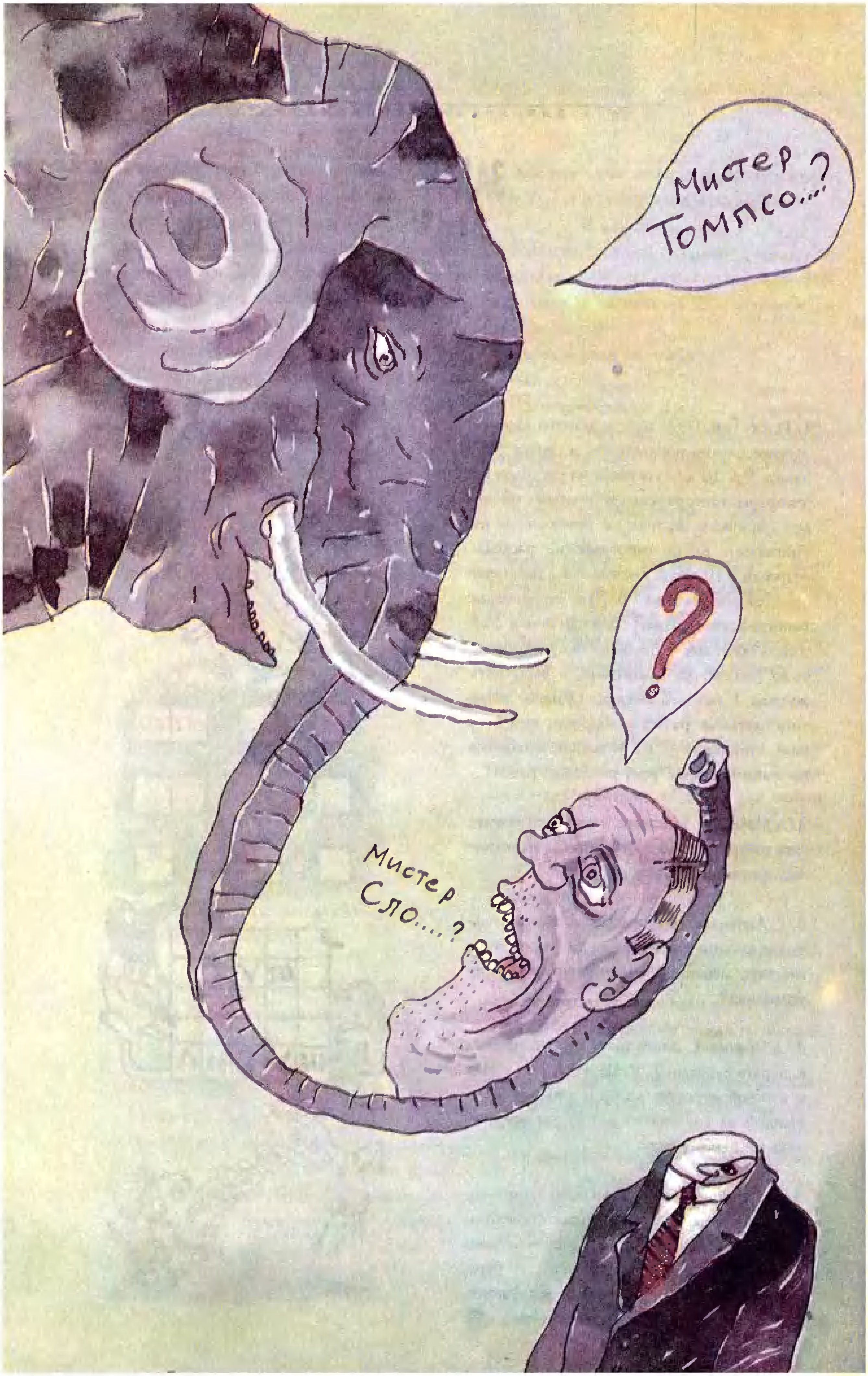


2/*А.Мочалов.* Впишите в клеточки все десять цифр (от 0 до 9) так, чтобы выполнялись указанные равенства.

3/*С.Азпецкий.* В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, вчетверо меньше ее. Чему равны углы треугольника?

4/*А.Никонов.* Заполните пустые клетки квадрата буквами Т, У, Ш, И, Л так, чтобы в каждой строчке, каждом столбце и на каждой из диагоналей все буквы встречались по одному разу.

5/*М.Гарднер, И.Акулич.* Слово «спор» состоит из четырех букв, идущих последовательно в алфавите (о,п,р,с). Найдите слова из двух, трех, четырех, пяти и *шести букв*, также идущих последовательно в алфавите. Лучшие решения будут опубликованы.


Мистер Томпсо...?
?
Мистер Сло....?

ЗАДАЧИ НА ЗАСЫПКУ

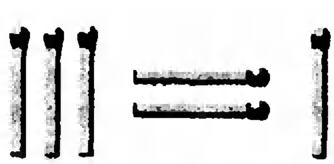
ИГОРЬ АКУЛИЧ

Вряд ли подобные задачи могут встретиться на вступительных экзаменах или в контрольной работе, хотя они и не требуют каких-то особых знаний. Причина в том, что все эти задачи *нечестные*: в них намеренно введены ложные следы, чтобы заставить решающего поскорее ступить на неправильный путь и либо найти неверное решение, либо сделать вывод об отсутствии решения вообще. Между тем решения всетаки имеются, и хотелось бы, чтобы читатель сумел их отыскать, пусть даже после небольшой наводки. В связи с этим данная статья приобрела трехглавый вид: глава 1-я — условия и неправильные решения; глава 2-я — подсказки; глава 3-я — правильные решения.

А теперь — в путь.

Условия и неправильные решения

Задача 1. *Из спичек выложено следующее числовое равенство:*



Какое наименьшее число спичек надо переложить, чтобы оно оказалось верным? Спички можно ломать.

Если бы ломать спички запрещалось, то решение было бы очевидным: перенести одну спичку из левой части в правую, получив тем самым тождество 2 = 2 (разумеется, в римских цифрах). Какой же кусочек (и какой именно спички) следует отломить? Сразу и не скажешь...

Задача 2. *В одной из задач конкурса «Математика 6—8» приводилось число 1,5, которое в 4 раза меньше суммы своих цифр, и предлагалось найти число, которое в 8 раз меньше суммы своих цифр (ответ: 1,125). Существует ли «промежуточное» число, которое в 6 раз меньше суммы своих цифр?*

Пойдем тем же путем, что и при решении упомянутой задачи конкурса (разумеется, если читатель эту задачу решал). Запишем искомое число в виде $(x+y)$, где x — целая часть, а y — дробная, т.е. $0 < y < 1$ (ясно, что целого числа, удовлетворяющего условию, не существует). Тогда сумма цифр числа будет в 6 раз больше, т.е. $(6x+6y)$. Так как сумма цифр — число заведомо целое, то $6y$ — тоже целое число, и с учетом ограничений $0 < y < 1$ оно может равняться 1, 2, 3, 4 или 5. Заметим, что если $6y = 1, 2, 4$ или 5, то y записывается в виде бесконечной периодической дроби, сумма цифр которой также бесконечна. Остается одна возможность: $6y = 3$, т.е. $y = 0{,}5$, и тогда число имеет вид $(x + 0{,}5)$, а его сумма цифр равна $6x + 3$. С другой стороны, эта сумма наверняка не превышает $x + 5$, поэтому $6x + 3 \le x + 5$, откуда $x \le 0,4$, т.е. $x = 0$. Итак, единственное число, которое, возможно, могло бы подойти — это $0 + 0,5 = 0,5$, но оно не в 6, а в 10 раз меньше суммы своих цифр! Поэтому таких чисел нет.

Но... стоп! Имеется же вполне законный общепринятый способ записи периодических дробей с помощью конечного числа цифр: период всего-навсего заключается в скобки. Поэтому для четырех опрометчиво отброшенных значений $6y$ получаем соответственно $y = 0,1(6)$; $0,(3)$; $0,(6)$ и $0,8(3)$. Уж здесь-то наверняка что-нибудь обнаружится! Например, для первого значения сумма цифр равна $6x + 1$, но при этом она не превышает $x + 1 + 6 = x + 7$. Поэтому $6x + 1 \le x + 7$, и $x \le 1,2$, откуда $x = 0$ или 1. Получилось два кандидата: $0,1(6)$ и $1,1(6)$, но, к сожалению, ни один из них не удовлетворяет условию. Не будем утомлять читателя перебором остальных значений, но и для них результат аналогичен (можете убедиться). Итак, решения все-таки нет?

Задача 3. *Пассажир собирается проехать на такси расстояние 4 км 180 м. Один таксист требует оплату как обычно — по счетчику, из расчета 6 рублей за посадку плюс 6 рублей за каждый километр пробега. Второй же требует оплату по спидометру, т. е. округляет пройденный путь в большую сторону до целого числа километров, и за 1-й километр берет 1 рубль, а за каждый последующий километр — вдвое больше, чем за предыдущий. В какое такси выгоднее садиться?*

Вот здесь-то все совершенно ясно. Первый таксист, очевидно, возьмет за проезд $6 + 6 \cdot 4,18 = 31,08 =$ 31 р. 8 к., а второй — $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ р., т. е. садиться во второе такси выгоднее аж на 8 копеек! Не ахти какие деньги, но дело-то не в копейках, а в принципе.

Итак, решение получено. Только оно неверное.

Задача 4. *Сколько слонов и верблюдов содержатся в зоопарке, если всего у них 22 губы и в 8 раз больше горбов, чем хоботов?*

Пусть в зоопарке C слонов и B верблюдов. Тогда, очевидно, у них C хоботов, $2B$ горбов и $2(C+B)$ губ. В итоге получаем систему уравнений: $2B = 8C$; $2(C+B) = 22$, откуда $C = 2,2$ и $B = 8,8$, что больше напоминает мясокомбинат, нежели зоопарк.

Однако здесь хитрость, кажется, заметна. Обязательно ли все верблюды двугорбые? Конечно, нет: бывают и одногорбые, и даже вообще безгорбые. Поэтому о числе горбов можно лишь сказать, что оно не превышает $2B$, вследствие чего получаем систему из одного неравенства и одного уравнения: $2B \ge 8C$; $2(C + B) = 22$, или $B \ge 4C$; $C + B = 11$. Если $C \ge 3$, то $B \ge 12$ и $C + B \ge 15$. Поэтому $C = 1$ или 2, и соответственно $B = 10$ или 9. Итак, получено целых два ответа: 1 слон + 10 верблюдов и 2 слона + 9 верблюдов. Какой же из них верен?

Оказывается, ни тот, ни другой.

Задача 5. *Для разнообразия — стишок:*

Дюжина березок, дюжина дубов,
Дюжина тарелок, дюжина грибов,
Дюжина мартышек, дюжина детей,
Дюжина драконов, дюжина чертей,
Дюжина балконов, дюжина мостов
И двенадцать дюжин розовых кустов.
А теперь вам надо точно подсчитать:
Сумма этих чисел делится на пять?

Что ж, подсчитаем. Для этого, конечно, необходимо знать, что дюжина — это 12. В каждой из первых пяти строчек дюжина встречается по 2 раза, а в шестой строчке имеется сразу 12 дюжин. Поэтому общая сумма чисел равна $2 \cdot 5 \cdot 12 + 12 \cdot 12 = 264$, что на 5 не делится.

Есть другие мнения?

Задача 6. *У Пети сломался стул — треснули все четыре ножки. Петя пошел к Коле и попросил какого-нибудь крепежа для ремонта. Коля вынес коробку, в которой* *лежали 15 болтов; на некоторые болты были навинчены гайки. Петя отобрал несколько болтов без гаек и столько же болтов с гайками. Вернувшись, он сначала все аккуратно развинтил, а затем отремонтировал стул, установив на каждую ножку одинаковое количество болтов и столько же гаек. После этого у него осталось в два с половиной раза больше болтов, чем гаек. Сколько же именно?*

Из условия следует, что Петя взял вдвое больше болтов, чем гаек, т.е. если он принес x гаек, то болтов — $2x$. Очевидно, $2x \le 15$, откуда $x \le 7$. Поэтому на каждую из четырех ножек была установлена одна гайка (иначе не хватило бы гаек). Следовательно, Петя установил на ножки стула 4 гайки и 4 болта, т. е. у него осталось $(2x-4)$ болтов и $(x-4)$ гаек. По условию $(2x-4)/(x-4) = 2{,}5$, откуда $x = 12$, что противоречит найденному выше ограничению $x \le 7$. Итак, вновь убеждаемся, что решения нет.

Задача 7. *Какое число надо вставить вместо вопросительного знака:*

300, 1, 1000000, 15, 70, 11, ?,

если известно, что оно не превышает суммы остальных чисел?

Чтобы исключить произвольные толкования, дадим уточнение: *эта последовательность имеет самое непосредственное отношение к так называемым спорадическим группам, а точнее, к одной из них — группе Томпсона, имеющей порядок* $2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{3}\cdot 7^{2}\cdot 13\cdot 19\cdot 31$.

К этой задаче не дается даже ошибочного решения, потому что вообще непонятно, как подступиться к ней, не будучи кандидатом наук, защитившим диссертацию по теории групп. Иначе говоря, ложный след заключается в том, что следа нет. Каково?

И тем не менее приведенных данных вполне достаточно, чтобы найти ответ, не листая энциклопедию и не обращаясь за консультацией к специалистам.

Подсказки

Задача 1. Вместо подсказки приведем другую задачу, широко известную. *Из спичек выложено равенство:*

Требуется переложить одну спичку, чтобы оно стало верным.

Решение заключается в том, чтобы вторую вертикальную спичку в левой части равенства положить горизонтально, вот так:

что соответствует тождеству $\sqrt{1} = 1$. Попробуйте взглянуть на исходную задачу с аналогичной точки зрения.

Задача 2. Имеются по крайней мере два принципиально различных подхода к решению этой задачи. Поэтому здесь даются две подсказки, сформулированные в виде вопросов:

1) Что больше: 0,(1) или 0,(1111)?

2) Неужели свет сошелся клином на десятичных дробях?

Задача 3. Цены на такси (и не только) имеют странную, но устойчивую тенденцию стремительно возрастать с течением времени. Поэтому никто не собирается перенаалаживать счетчики такси, так как это пришлось бы делать слишком часто, да и никаких цифр не хватит! И таксисты используют прежние счетчики, настроенные еще по застойным расценкам: 20 копеек за посадку плюс 20 копеек за километр пробега, а итоговую сумму умножают на 30. Мог ли в таком случае получиться результат, равный 31 р. 8 к.?

Задача 4. Сходите в зоопарк и посмотрите на слона.

Задача 5. В условии упоминаются черти, от которых даже атеисту не следует ждать ничего хорошего.

Задача 6. Выражение «на некоторые болты были навинчены гайки» означает не совсем то же самое, что выражение «на некоторые болты было навинчено по гайке».

Задача 7. Отдохните от математики, переключитесь на русский язык и обратите внимание, что название каждого из чисел состоит из одного слова.

Правильные решения

Задача 1. Ответ: ни одной! Если рассматривать крайние спички в левой части равенства как обозначение абсолютной величины (что ничем не хуже квадратного корня), то данное равенство принимает вид: $|1| = 1$, которое уже верно, так чего там еще перекладывать?

Задача 2. Первое решение основано на том, что при записи периодических дробей не обязательно записывать в скобках наименьший период. Это позволяет расширить свободу выбора и без особого труда найти немало ответов (подробности не приводятся, так как слишком просты). Например, для $6y = 2$ получаем три следующих числа: 2,(3333); 5,(333333333) и 8,(33333333333333). Можно и дальше хитрить, записывая период не с самого начала, например: 2,333(3). Но надо признать, что такие решения оставляют чувство досады, поскольку они все же нехорошо выглядят.

Второе решение свободно от этих недостатков. Оно использует простые дроби, причем ответом является самая простая из простых дробей: дробь 1/2. Такая запись во всех отношениях безупречна.

Задача 3. Счетчик таксомотора работает так: когда водитель, трогаясь с места, включает его, на нем сразу появляется сумма за посадку (20 к.), которая дискретно (т.е. скачком) возрастает на 2 к. через каждые 100 метров пути. Поэтому как только такси проедет 4100 метров, на счетчике появится сумма $20 + 20 \cdot 4{,}1 = 1$ р. 2 к., и это значение сохранится вплоть до расстояния 4200 м. Поэтому с учетом новых тарифов пассажиру придется заплатить первому таксисту $1{,}02 \cdot 30 = 30{,}6 = 30$ р. 60 к., что на 40 копеек дешевле, чем для второго такси.

(Впрочем, есть основания полагать, что и это решение не учитывает всех реалий, а на самом деле оба такси равноценны. Дело в том, что мелочь исчезает катастрофически, и вряд ли в кармане вдруг найдется 60 копеек, чтобы заплатить таксисту точно нужную сумму. Ну, а заводить разговор о сдаче тем более бесперспективно.)

Задача 4. У слона всего одна губа — нижняя (а верхняя вместе с носом в процессе эволюции превратилась в хобот). Поэтому на самом деле система должна выглядеть так: $2B \ge 8C$; $C + 2B = 22$. Из равенства следует, что C четно, т. е. $C = 2M$, и тогда система принимает вид: $B \ge 8M$; $M + B = 11$. Если $M \ge 2$, то $B \ge 16$ и $M + B \ge 18$. Поэтому $M = 1$; тогда $C = 2$ и $B = 10$.

Ответ: 2 слона и 10 верблюдов.

Задача 5. Дюжина чертей — это, конечно, чертова дюжина, которая, как известно, равна не 12, а 13. Поэтому общая сумма составляет не 264, а 265, что делится на 5.

Задача 6. Здесь ситуация примерно та же, что и с верблюжьими горбами, но «с обратным знаком»: если у верблюда может быть не более двух горбов, то на болт можно навинтить и несколько гаек. Поэтому использованное в решении утверждение «число гаек равно половине числа болтов» надо заменить на более слабое «число гаек не меньше половины числа болтов». Прочее остается в силе: число болтов — четное и не превосходит 14. Число использованных для ремонта болтов кратно количеству ножек стула, т.е. делится на 4 и потому тоже четное. Поэтому оставшееся после ремонта число болтов — тоже четное, причем при делении его на 2,5 должно получиться целое число (равное количеству оставшихся гаек). Но среди четных чисел, меньших 14, лишь число 10 делится нацело на 2,5 (в результате получается 4). Отсюда сразу следует, что на ремонт затрачено 4 болта (если больше, то исходное число болтов превысит 14). Гаек затрачено столько же, т.е. тоже 4. Задача решена.

Ответ: Петя принес 14 болтов, на которые было навинчено 8 гаек (на один болт — две штуки и на шесть болтов — по одной). Для ремонта стула он израсходовал 4 болта и 4 гайки.

Задача 7. Эта задача действительно на засыпку. Но если догадаться выписать названия чисел:

Триста
Один
Миллион
Пятнадцать
Семьдесят
Одиннадцать
?

то сразу видно, что первые их буквы образуют слово ТОМПСО?, и теперь становится ясно, что вместо вопросительного знака должно стоять число, начинающееся с буквы «Н». Такое число лишь одно — ноль.

Но к чему тогда упоминание о том, что это число должно быть меньше суммы остальных? Оказывается, существует еще одно число, название которого начинается с буквы «Н», — нониллион (или нанольон), равное 10^{30}, хотя оно, пожалуй, не всем известно.

"ЛОЖКА ДЕГТЮ В БОЧКЕ МЕДА"

СВЕТЛАНА ТИХОМИРОВА

Несколько лет назад издательство «Художественная литература» выпустило сборник Владимира Даля «Пословицы русского народа». Эта книга впервые увидела свет в 1861 году и с тех пор переиздавалась лишь один раз — в 1957 году.

Как известно, «пословицы недаром молвятся». Эти краткие образные изречения обычно отражают какую-либо грань народного опыта. Из великого множества собранных замечательным русским писателем пословиц выберем лишь несколько и попытаемся объяснить их только с точки зрения физического смысла (хотя житейское толкование пословиц всегда гораздо богаче и разнообразнее).

Вот несколько пословиц, связанных с возникновением звука:

«Оттого телега запела,
что давно дегтю не ела»;

«Худое колесо больше (пуще) скрыпит»;

«Ударь кулаком в стол:
ножницы скажутся (отзовутся)»;

«Шумит, как ветер в пустую трубу».

В первом изречении предполагается, что деготь выполняет роль смазки при трении колеса об ось. Нет смазки — возникает сильное трение, которое вызывает колебания колеса на оси телеги, при этом и появляется характерный скрипучий звук. (По той же причине скрипят и несмазанные дверные петли.)

Колесо «худое», т.е. изношенное, с разбитой втулкой или треснувшим ободом, конечно же, скрипит гораздо сильнее нового крепкого колеса.

При ударе стол приходит в колебания, которые передаются ножницам, те подпрыгивают и «отзываются».

Последнюю пословицу можно объяснить так. При ветре с краев различных предметов — домов, труб и др. могут срываться воздушные вихри. Когда направление ветра устойчиво, образуется регулярная последовательность движущихся вихрей. Поскольку давление воздуха внутри вихрей всегда меньше, чем снаружи, в воздухе возникают периодически повторяющиеся местные изменения давления. Они-то и являются источниками звука. Пустая труба при этом может выполнять роль резонатора, усиливающего звуки определенной частоты. Вот тогда мы и слышим завывание ветра в трубах или свист ветра в проводах, в ветвях деревьев, в расщелинах скал.

Теперь рассмотрим две пословицы, касающиеся тепловых явлений:

«Как в кремне огонь не виден, так и в человеке душа»;

«Спросил бы у гуся, не зябнут ли ноги».

Их объяснить совсем легко.

Искры из кремня появляются только во время удара по нему другим камнем или металлом. При этом выбиваемые частички сильно нагреваются и светятся.

Гуси, куропатки и другие птицы зимой ... снегу и не мерзнут потому, что температура их лап отличается от температуры тела. Например, температура тела белой куропатки может быть на 38 градусов выше температуры ее лап. А низкая температура конечностей, естественно, сильно понижает теплоотдачу. Таковы защитные свойства организма.

Есть в сборнике и пословицы, в которых говорится о таком свойстве тел, как смачиваемость:

«Он сух из воды выйдет»;

«С гуся вода,
а с меня, молодца, небылые слова»;

«Без сала дегтя не отмоешь».

Можно ли выйти сухим из воды? Конечно, но для этого нужно тело смазать веществом, которое не смачивается водой, например каким-либо жиром. Попробуйте в этом убедиться на собственном примере.

Перья гуся и других водоплавающих птиц покрыты тончайшим слоем жира. Выйдет птица из воды, встряхнется и оказывается сухой. (В житейском смысле пословицу надо понимать так: молодцу все нипочем, при всех обстоятельствах он остается «сухим».)

Поверхность, покрытая дегтем, тоже не смачивается водой. Но деготь растворяется в жирах и с их помощью может быть удален с поверхностей предметов. (Жиры, кстати сказать, входят в состав любого мыла.)

В заключение — несколько пословиц, сформулированных в форме загадок:

1. У тебя есть, у меня есть, у дуба в поле, у рыбы в море.

2. Поутру с сажень, в полдень с пядень, а к вечеру — через поле хватает.

3. Чего в коробейку не спрятать?

4. Чего в избе не видно?

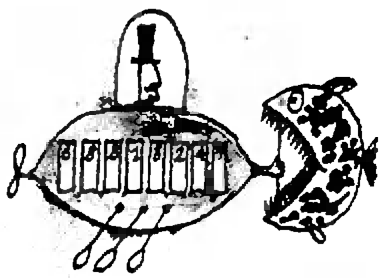
5. Что стучит без рук?

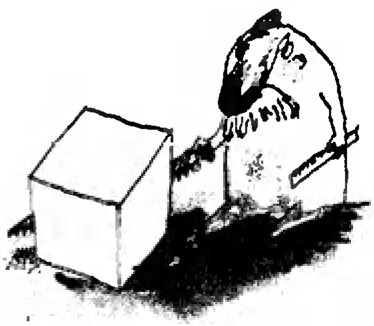
6. Сивый жеребец во все царство ржет.

7. Вечером наземь слетает, ночь на земле пребывает, утром опять улетает.

Все «загадываемые» объекты в них имеют физическую природу, т.е. относятся к физическим понятиям или явлениям. Попытайтесь их отгадать.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»





Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6 — 8 классов. Конкурс состоит из 24 задач и заканчивается в апреле. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект». Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 ноября 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 — 8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

19/*Л.Курляндчик.* Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, удовлетворяющие уравнению

$$2(a + b + c) = ab + bc + cd.$$

20/*А.Савин.* На книжной полке стоит восьмитомник Жюля Верна. Разрешается вытащить том, стоящий либо третьим, либо восьмым, считая слева направо, и поставить его первым. Докажите, что после нескольких таких операций можно поставить тома в правильном порядке, независимо от того, как они стояли первоначально.

21/*П.Филевич.* Из кассы цифр вытащили пять карточек с различными цифрами и составили из них некоторое пятизначное число. Затем стали составлять из этих карточек всевозможные трехзначные числа и нашли их сумму. Эта сумма оказалась равной первоначальному пятизначному числу. Какое это было число?

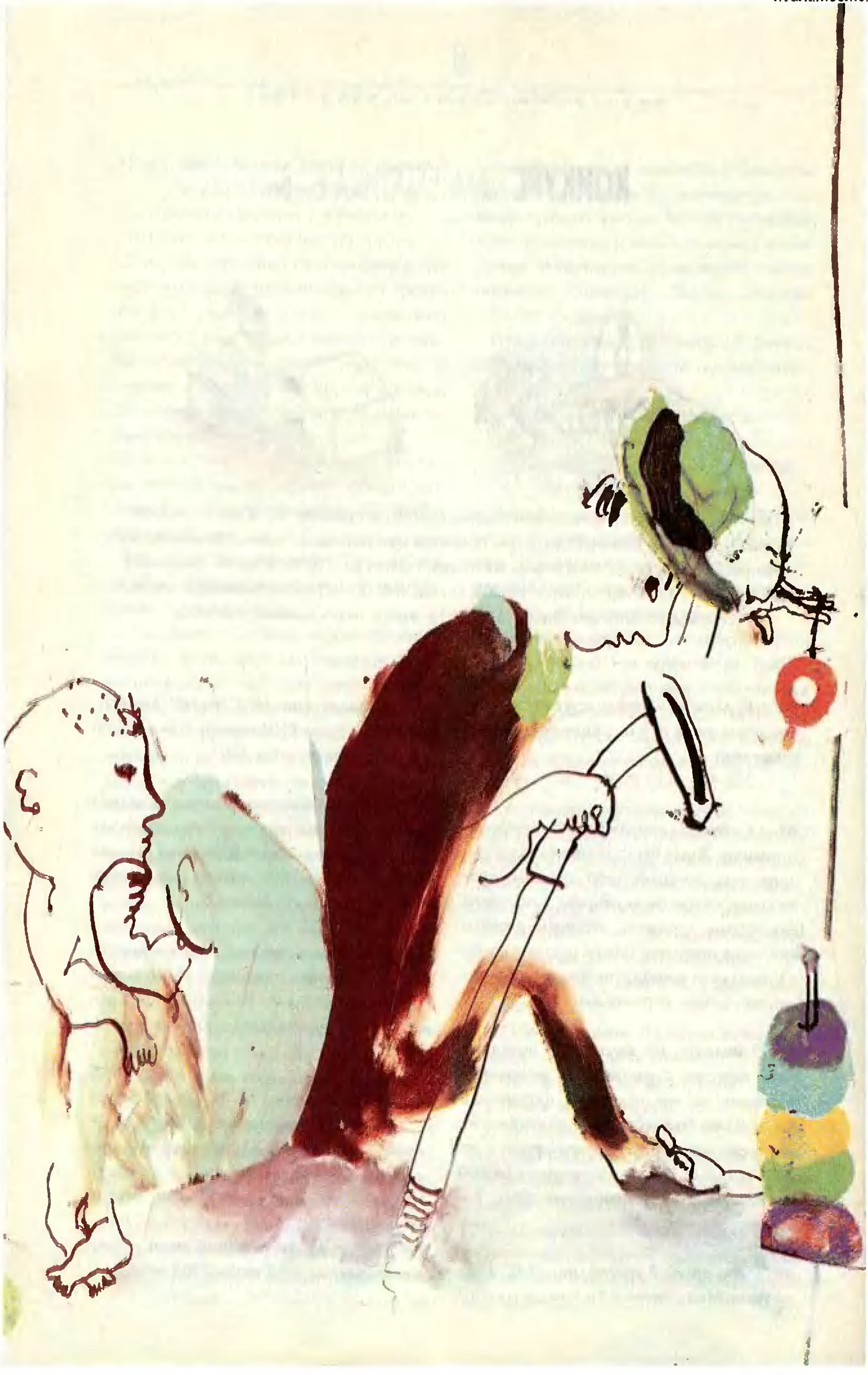
22/*С.Азпецкий.* В треугольнике ABC взяты точки M на стороне AB и N на стороне BC. Проведены отрезки AN, CM и MN. Докажите, что если угол BNM меньше угла ANM, то угол BMN больше угла AMN.

23/*С.Токарев.* Какое наибольшее число дней в году можно выбрать так, чтобы любые два из них, но не все вместе, пришлись бы либо на один день недели, либо на один месяц, либо на одно число месяца?

24/*И.Акулич.* Развертка куба состоит из шести одинаковых квадратов. А можно ли из пяти одинаковых прямоугольников составить развертку какого-нибудь параллелепипеда?

В условие задачи № 17 (см. «Квант» № 1/2) вкралась опечатка. Условие следует читать так: «Докажите, что при любом натуральном n число $(n+1)^{1993} + n^{1993} + (n-1)^{1993} - 3n$ делится на 10».

Срок присылки решений этой задачи продлевается до 1 июня 1993 года.



шарик с дыркой в струе пылесоса

СТАНИСЛАВ КУЗЬМИН

Наверное, многим доводилось наблюдать, как шарик для пинг-понга устойчиво висит в воздушной струе, созданной феном или пылесосом. Давайте немного изменим этот опыт. Возьмем деревянный шарик, например от детской пирамидки, и просверлим в нем вдоль оси отверстие диаметром порядка сантиметра. Если такой шарик поместить в струю, то сначала он просто парит в воздухе, а потом начинает раскручиваться, причем так, что дырка вращается в вертикальной плоскости. Частота вращения при этом достигает ста оборотов в секунду, а высота поднятия шарика оказывается примерно в пять раз больше, чем вначале (сравните рисунки1, *а* и 1, *б*).

Рисунок 1а

(Измерение частоты вращения в нашем опыте производилось следующим образом: в поверхность шарика был вделан маленький магнит, а сам шарик помещался в катушку индуктивности, ЭДС индукции с которой выводилась на осциллограф.)

Такой же опыт можно провести с другими шариками — тоже сплошными, но просверленными иначе (см. рис. 2). Во всех случаях наблюдается эффект вращения и подъема, однако у шарика со смещенным отверстием вращение происходит не в одной и той же плоскости (с прецессией, как говорят научным языком). По-видимому, это связано с изменением положения центра тяжести шарика относительно его геометрического центра.

Для опытов можно использовать и пустотелые шарики (для пинг-понга) с отверстиями. Правда, вращаются они медленнее и поднимаются на меньшую высоту. Однако, если в отверстие вставить бумажную трубочку, то вращение ускорится.

Все эти опыты показали, что очень важным является проток воздуха через дырку. Если отверстие закрыть, например

Рисунок 1б

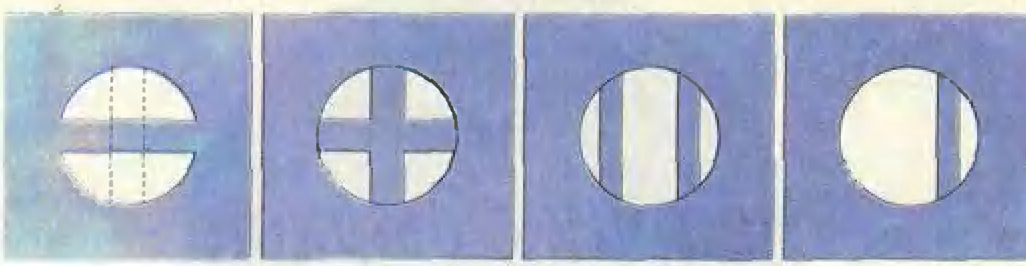


Рисунок 2

пластилином, то вращение прекращается.

Чтобы лучше понять «устройство» потока воздуха вблизи вращающегося шарика, можно трубу пылесоса обклеить длинными нитками и сфотографировать шарик со вспышкой (например, обычным «Зенитом»). На рисунке 3 видно, что поток «прижимается» к шарику с той его стороны, которая движется по потоку, и «отталкивается», отклоняясь в сторону, с противоположной стороны. При этом шарик смещается относительно центра струи.

Попробуем дать возможное объяснение опыта. Сначала рассмотрим случай с совершенно гладким шариком без дырки. Он будет висеть в струе устойчиво, даже если струю немного наклонить. Это объясняется тем, что, в соответствии с законом Бернулли, давление в струе меньше, чем в окружающем воздухе, поэтому стоит только шарику сместиться, как на край, выходящий за пределы струи, начинает действовать сила, возвращающая его обратно.

Теперь перейдем к вращающемуся шарику. Если бы он вращался в центре струи, то скорости, а следовательно, и давления с разных сторон шарика были бы разными, так как вращающийся шарик с одной стороны тормозит поток, а с другой стороны ускоряет его. И тогда возникла бы сила, смещающая шарик в сторону. Но поскольку наш шарик висит на месте, средние давления с разных сторон от него должны быть равны. Из этого следует, что вращающийся шарик должен быть смещен от центра струи, так как равенство скоростей с разных сторон от него возможно только в этом положении (скорость в струе убывает с удалением от центра, а это значит, что край, находящийся в центре струи, должен двигаться против потока, а противоположный край — по потоку).

А почему же шарик вращается? Опять начнем рассуждения с шарика без дырки, который висит точно на оси потока и не вертится. Стоит этот шарик сместить в сторону, как с внешней стороны воздух начинает «тереться» о большую площадь поверхности, чем с другой стороны, и шарик приходит во вращение в вертикальной плоскости. Если шарик отпустить, он возвращается в свое равновесное положение на оси струи и вращение прекращается.

Шарик с дыркой в аналогичном опыте ведет себя иначе — наличие дырки делает его вращение устойчивым и без внешнего воздействия. Дело в том, что отверстие изменяет структуру потока вокруг шарика. В течение четверти оборота, показанной на рисунке 4, *а*, струйка, вырывающаяся из дырки, создает облако маленьких вихрей. Эти вихри затрудняют отрыв потока, чем позволяют ему дольше стелиться вдоль поверхности шарика. При этом как бы увеличивается вязкость воздуха и связанная с ней сила трения. Во время фазы вращения, изображенной на рисунке 4, *б*, этот эффект отсутствует, так как поток успевает оторваться раньше. Таким образом возникает момент силы трения, закручивающий шарик. А это, в свою очередь, обусловливает возникновение поперечной силы (силы Магнуса), ко-

Рисунок 3

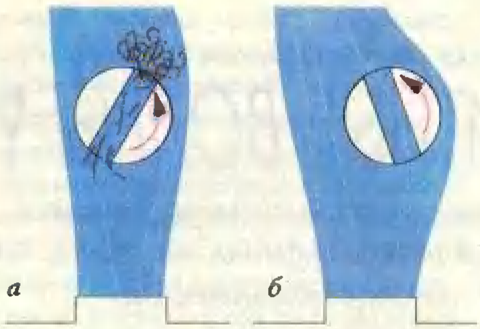


Рисунок 4

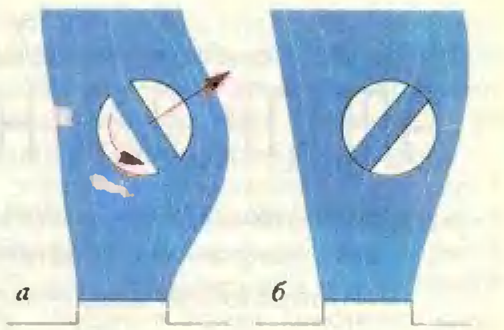


Рисунок 5

торая смещает устойчивое положение шарика относительно оси потока.

Дополнительный подъем шарика с дыркой можно связать с тем, что в некоторых положениях сила, смещающая шарик от центра струи, направлена не горизонтально, а имеет вертикальную компоненту (рис. 5, *а*). Воздух, проходящий через дырку, как бы подсасывает всю остальную струю, вызывая ее перекос. Этого не происходит в противоположном положении (см. рис. 5, *б*), так как здесь ничто не мешает потоку оторваться от шарика.

А теперь попытаемся сделать некоторые оценки. На шарик по вертикали действуют три силы: сила тяжести, сила сопротивления воздуха и вертикальная составляющая силы Магнуса. Силу сопротивления можно записать в виде $F_c = k\rho v^2 S$, где k — коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела, ρ — плотность воздуха, v — скорость набегающего потока, S — площадь лобового сечения шарика. Силу Магнуса можно оценить по порядку величины из закона Бернулли. Пусть цилиндр длиной l и диаметром d вращается с линейной скоростью u по часовой стрелке в безграничном потоке газа, движущегося со скоростью v. Тогда справа от цилиндра будет скорость $v - u$, а слева $v + u$. По закону Бернулли, разность давлений на цилиндре равна

$$\Delta p = \rho\frac{(v+u)^2}{2} - \rho\frac{(v-u)^2}{2},$$

а сила Магнуса — $F_M \approx \rho v u d l$.

Для грубой оценки шарик можно представить цилиндром длиной порядка диаметра, а линейную скорость вращения шарика считать равной скорости потока. Чтобы получить вертикальную составляющую силы Магнуса, нужно умножить ее на синус так называемого угла перекоса струи (судя по рисунку, β составляет примерно 4 — 5 градусов). Тогда для шарика получаем $F_M \approx \rho d^2 v^2 \sin\beta$.

Изменение скорости в струе с высотой можно оценить из закона сохранения импульса. Поскольку в нашем случае статическое давление и плотность воздуха в струе меняются незначительно, в приближенной форме этот закон запишем так: $v_1^2 S_1 \approx v_2^2 S_2$. Сечения струи можно выразить через высоты h_1 и h_2 и угол расхождения струи. Тогда

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Надо заметить, что начало струи находится не в месте ее выхода из трубы, а в вершине угла ее расхождения, поэтому высота отсчитывается от этой вершины, а не от кромки трубы.

Таким образом, из условия равновесия шарика по вертикали: $mg = F_c + F_M$ можно выразить высоту подъема шарика:

$$h_2 \approx h_1 d v_1 \sqrt{\frac{\rho(k+\sin\beta)}{mg}}.$$

Здесь h_1 и v_1 — высота и скорость струи на выходе из трубы, которые легко измерить. Наши оценки давали высоту подъема шарика порядка 30 см, что вполне соответствовало опытным результатам.

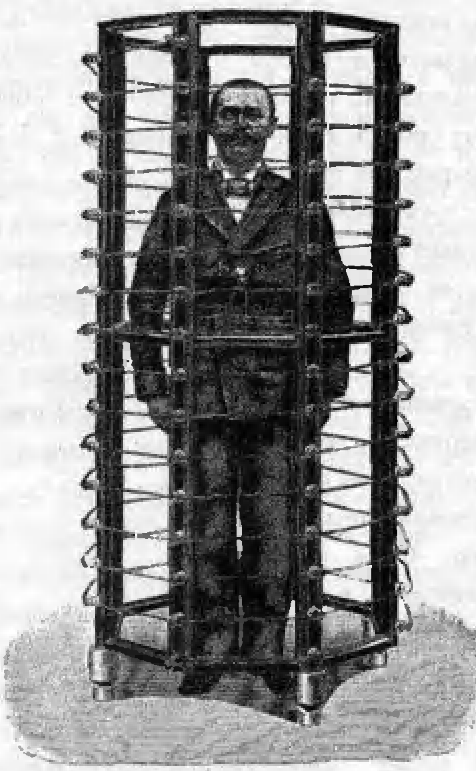
Автор этой статьи — ученик 11 класса средней школы №130 г. Новосибирска.

А так ли хорошо знакомы вам

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ?

Описанные эксперименты, как, по крайней мере, кажется мне, устраняют сомнения в тождественности света, теплового излучения и электродинамического волнового движения.

Г.Герц



Как это ни удивительно, с этими волнами человечество было знакомо еще с незапамятных времен. Люди грелись, еще не называя тепловые лучи инфракрасными, загорали, не подозревая, что на их кожу воздействует ультрафиолетовое излучение. Да в конце концов они видели! И не только видели, но уже и экспериментировали со светом как с волнами.

Догадки о том, что все эти виды излучений имеют одну электромагнитную — природу, постепенно выстраивались в научную теорию. Достижения своих великих предшественников, и прежде всего М.Фарадея, в 1865 году синтезировал Дж.Максвелл, предсказав, в том числе, и возможность передачи информации без проводов.

Ныне, когда прошло немногим более ста лет после создания максвелловской теории, электромагнитные волны доносят до нас не только радио- или телесигналы. Человек научился создавать и принимать излучения, соответствующие любой части необыкновенно широкой электромагнитной шкалы — от низкочастотных колебаний до гамма-излучения. Невидимые — микроволновые и ультрафиолетовые, инфракрасные и рентгеновские — лучи «озвучили» для нас неуловимые ранее «разговоры» атомов и молекул, звезд и галактик.

К сожалению, сегодня мы сможем «коснуться» лишь нескольких участков этой гигантской шкалы.

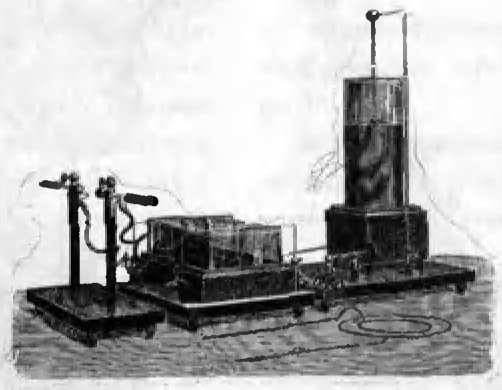
Вопросы и задачи

1. В непосредственной близости друг от друга находятся электрически заряженный шар и постоянный магнит. Существует ли в окружающем их пространстве электромагнитное поле?
2. Почему антенны автомобильных радиоприемников устанавливают, как правило, вертикально?
3. Почему при связи на коротких волнах образуются так называемые зоны молчания?
4. Почему станции длинно- и средневолнового диапазонов ночью можно принимать на гораздо большем расстоянии, чем днем?
5. Почему нельзя осуществлять радиосвязь с подводной лодкой, когда она находится под водой?
6. Для чего радиолокация впервые была применена в астрономии?
7. Почему устойчивый прием телевизионных сигналов возможен только в пределах прямой видимости?
8. Почему температура всех тел в неотапливаемом закрытом помещении становится одной и той же?
9. Испускает ли красные лучи кусок железа, нагретый до белого каления?

10. Почему стеклянная призма непригодна для получения спектров инфракрасного и ульрафиолетового излучений?
11. На фотографиях местности, сделанных с самолета, можно четко разделить маскировку под зелень и естественную зелень, неразличимые при непосредственном наблюдении. Почему?
12. Почему сплошной рентгеновский спектр, испускаемый рентгеновской трубкой, имеет резкую границу со стороны коротких волн?
13. Можно ли рентгеновские лучи, применяемые для обнаружения дефектов изделий, заменить гамма-лучами, испускаемыми радиоактивным элементом?

Микроопыт

Понаблюдайте за работой комнатного электрического обогревателя, состоящего из накаливаемой спирали и хорошо полированной вогнутой металлической поверхности. Как вы думаете, каково предназначение этой поверхности?



Любопытно, что...

... в соответствии с домаксвелловскими представлениями,электрическое и магнитное поля должны были исчезать при обращении тока в нуль (поскольку считалось, что изменяющееся электрическое поле не производит никакого эффекта).

... распространенное мнение о том, что Герц ставил свои опыты для подтверждения теории Максвелла, ошибочно. Первоначально Герц был скорее противником этой теории и признал ее лишь под давлением им же самим полученных доказательств.

... переход от электрической лампы накаливания с угольной нитью к современной лампе с вольфрамовой нитью дал возможность повысить температуру нити всего лишь на 400К. Однако это увеличило долю энергии, приходящейся на излучение в видимой части спектра, более чем в 3 раза — от 0,5% до 1,6%.

... невидимые для человека инфракрасные и ультрафиолетовые лучи широко используются для ориентации в живой природе. Так, некоторые змеи чувствуют колебания температуры в одну десятую градуса на расстоянии в полметра. Пчелы же «видят» ультрафиолетовые лучи, указывающие на расположение нектарников в цветках.

... начало радиоастрономии связано с работами инженера американской компании «Bell» К.Янского, экспериментировавшего в 1931 году с вращающейся радиоантенной для выяснения помех коротковолновой радиотелефонной связи. Шум, который он исследовал, шел, по всей видимости, из центра нашей Галактики.

... параболические антенны современных радиотелескопов обладают невероятной чувствительностью — они способны уловить потоки энергии плотностью менее

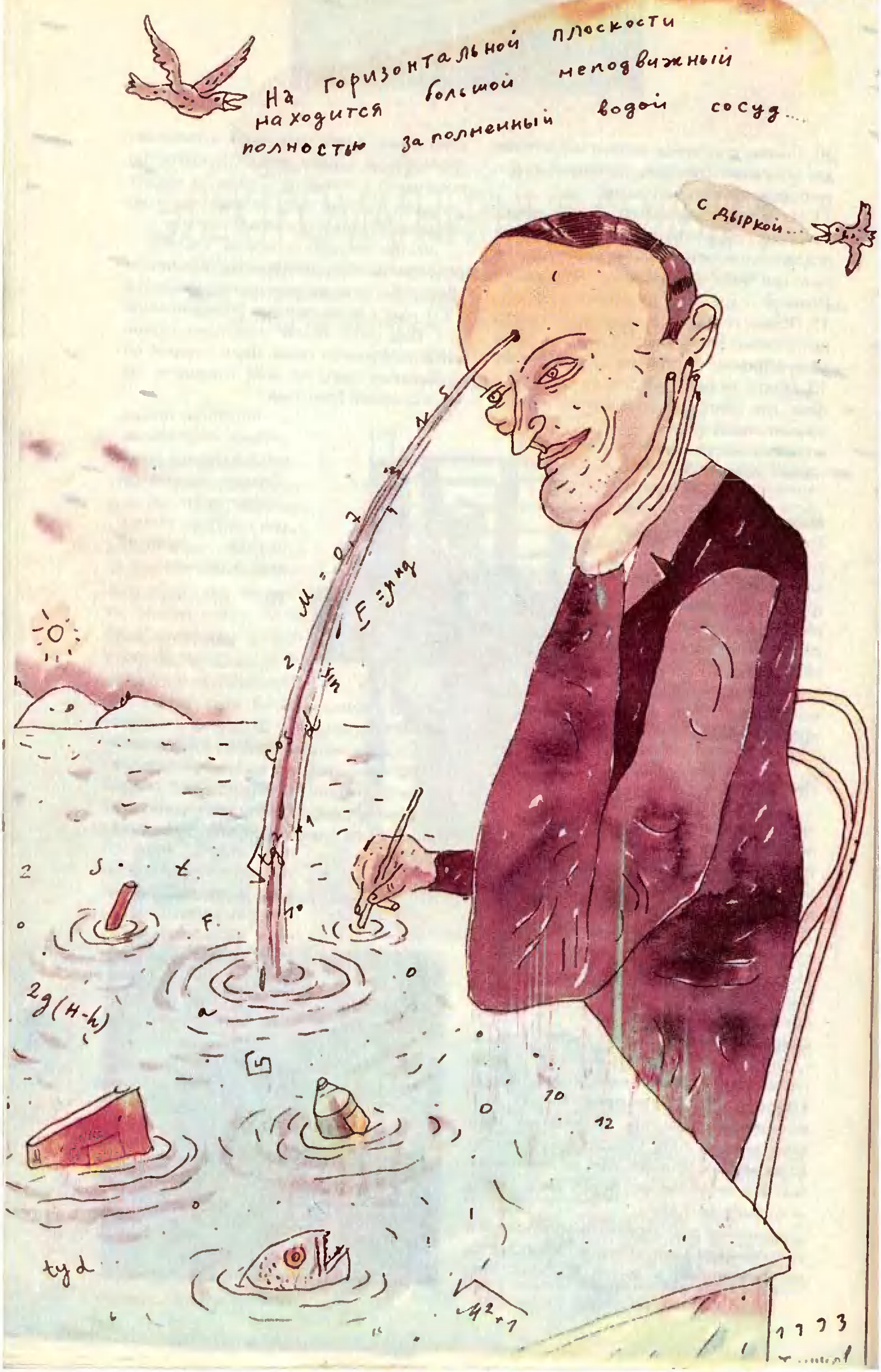
10^{-29} Вт · с / м^2.

... в рентгеновской астрономии для исследования самых жестких гамма-квантов используются... оптические телескопы. Дело в том, что при прохождении через атмосферу такие гамма-кванты вызывают появление электронов большой энергии, возбуждающих знаменитое «черенковское» излучение, которое в конце концов и регистрируется оптическим телескопом.

Материал подготовил **А. Леонович**

Что читать в «Кванте» об электромагнитных волнах (публикации последних лет)

1. *«Генрих Герц и электромагнитные волны»* — 1988, N1, с. 48;
2. *«Со стороны виднее»* — 1990, N 9, с. 2;
3. *«Экспериментируем с ИК лучами»* — 1990, N 10, с. 44;
4. *«Спутниковое телевидение»* — 1991, N 1, с. 4;
5. *«Как излучать радиоволны?»* — 1991, N 11, с. 33;
6. *«Грибы и рентгеновская астрономия»* — 1992, N 9, с. 21;
7. *«Калейдоскоп «Кванта»* — 1989, N 2, с. 40; 1990, N 2, с. 40; 1992, N 10, с. 40.


На горизонтальной плоскости
находится большой неподвижный
полностью заполненный водой сосуд...
с дыркой...

ЭКСТРЕМУМЫ **В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ**

ГЕННАДИЙ КЕМБРОВСКИЙ

Среди разнообразных физических задач встречаются такие, в которых определяются экстремальные значения искомых величин (минимальный коэффициент трения, максимальный угол наклона и т.п.). Нередко в таких случаях на результат одновременно влияют несколько конкурирующих факторов, одни из которых способствуют его увеличению, а другие — уменьшению. Если при этом из-за каких-либо изменений решающее влияние переходит от одних факторов к другим, то искомая величина сначала возрастает, а затем убывает, или наоборот. В первом случае она имеет максимум, во втором — минимум.

Способы нахождения экстремумов в зависимости от конкретных условий в задачах могут быть разными. Существует достаточно универсальный метод, основанный на использовании дифференциального исчисления, но он не всегда является самым простым. В некоторых случаях полезными могут оказаться графики. Одним словом, возможны варианты. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. С какой минимальной силой нужно тянуть за веревку, чтобы равномерно перемещать санки массой $m = 10$ кг по горизонтальному асфальту, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}70$?

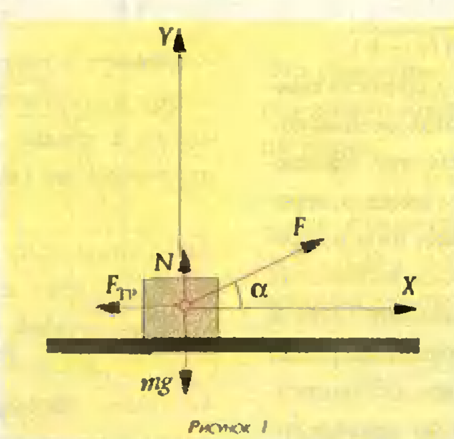


Рисунок 1

Запишем уравнения движения санок в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления (рис. 1):

$$-F_{тр} + F\cos\alpha = 0,$$

$$-mg + N + F\sin\alpha = 0,$$

где α — угол между веревкой и горизонтом, а сила трения $F_{тр} = \mu N$. Отсюда найдем силу натяжения веревки:

$$F = \mu mg/(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

Проанализируем зависимость силы F от угла α. Санки будут двигаться равномерно, если горизонтальная составляющая силы натяжения веревки $F\cos\alpha$ равна силе трения $F_{тр}$. Поэтому для обеспечения минимальности силы F веревку, казалось бы, надо тянуть горизонтально, т.е. под углом $\alpha = 0$. Но с другой стороны, желательно, чтобы угол α был побольше, так как в этом случае за счет увеличения вертикальной составляющей $F\sin\alpha$, стремящейся приподнять санки, уменьшается их давление на опору и соответственно уменьшается сила трения $F_{тр}$. Таким образом, на результат, как мы видим, влияют два конкурирующих фактора.

Представим зависи-

Графика Леонида Тишкова

мость $F = F(\alpha)$ в виде графика (рис. 2). Из него видно, что исследуемая функция имеет минимум. Для нахождения значений α_0 и F_{min} воспользуемся аналитическим методом. Функция $F(\alpha)$ минимальна, если знаменатель максимален. Обозначим его буквой y, найдем производную y' по α и приравняем ее к нулю:

$$y' = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0.$$

Отсюда, обозначив соответствующий угол α_0, получим

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu, \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg}\mu = 35^\circ.$$

Тогда

$$F_{min} = \mu mg/(\cos\alpha_0 + \mu\sin\alpha_0).$$

Используя соотношения

$$\cos\alpha_0 = 1\Big/\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha_0 + 1} = 1\Big/\sqrt{\mu^2+1},$$

$$\sin\alpha_0 = \operatorname{tg}\alpha_0\Big/\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha_0 + 1} = \mu\Big/\sqrt{\mu^2+1},$$

найдем искомую величину:

$$F_{min} = \mu mg\Big/\sqrt{\mu^2+1} = 56 \text{ Н}.$$

Задача 2. На горизонтальной плоскости находится большой неподвижный полностью заполненный водой сосуд. Через маленькое отверстие в его боковой стенке вытекает струя воды. На какой высоте должно быть отверстие, чтобы дальность полета струи была максимальной? Какова эта дальность? Высота сосуда H. Трение не учитывайте.

Дальность полета струи равна $s = v_0 t$, а высота ее падения — $h = gt^2/2$, где $v_0 = \sqrt{2g(H-h)}$ — скорость истечения воды из отверстия, t — время падения воды (рис. 3). Отсюда, исключив t, получим

$$s = v_0\sqrt{2h/g} = 2\sqrt{h(H-h)}.$$

Как и следовало ожидать, дальность полета s зависит от высоты расположения отверстия h. Проанализируем эту зависимость. С одной стороны, чем ниже отверстие, тем выше столб воды над ним и, следовательно, больше скорость вытекания воды v_0; значит, большей должна быть и дальность полета s. Но с другой стороны, чем меньше h, тем меньше время полета t, что приводит к уменьшению дальности.

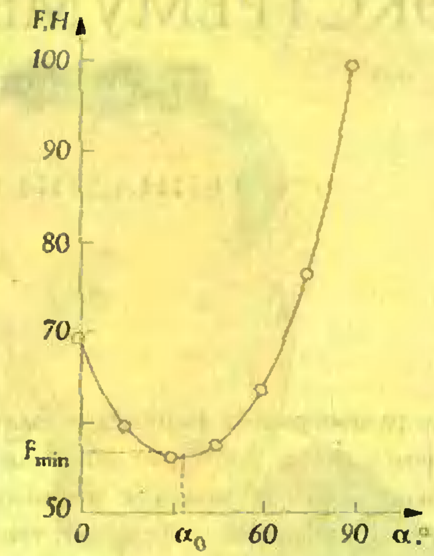


Рисунок 2

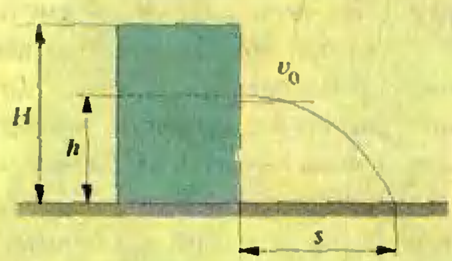


Рисунок 3

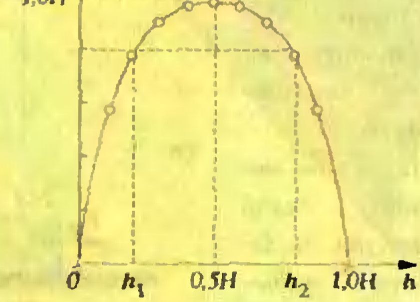


Рисунок 4

Здесь конкурируют два фактора.

Рассмотрим график функции $s = s(h)$ (рис. 4). Из него видно, что s максимальна при $h = h_0 = H/2$ (отверстие находится на середине высоты сосуда). При этом $s_{max} = H$.

Эти же результаты можно получить аналитически. Действительно, функция $s(h)$ максимальна, когда максимально подкоренное выражение. Обозначим его буквой y, возьмем производную y' по аргументу h и приравняем ее к нулю:

$$y' = H - 2h = 0.$$

Отсюда $h = h_0 = H/2$, а максимальная дальность

$$s_{max} = H.$$

Для отыскания экстремума можно также использовать следующий прием. Зададим себе вопрос — сколько значений высоты h соответствуют данной дальности s? Как видно из рисунка 4, при $s < s_{max}$ таких значений два, при $s = s_{max}$ — одно, а при $s > s_{max}$ — ни одного. Чтобы использовать это наблюдение, будем считать, что в уравнении $s = 2\sqrt{h(H-h)}$ задано s, а h — не известна. Переписав его в виде квадратного уравнения

$$h^2 - Hh + \frac{s^2}{4} = 0,$$

запишем условие равенства нулю дискриминанта:

$$H^2 - s_{max}^2 = 0,$$

откуда получаем такой же, конечно, как и раньше ответ:

$$s_{max} = H.$$

Хотя в данной задаче такой прием выглядит несколько искусственно, в других случаях (см., например, задачу 1 из упражнений в конце статьи) он сильно упрощает решение.

Задача 3. Газ перевели из состояния с давлением $p_1 = 150$ кПа и объемом $V_1 = 20{,}5$ л в состояние с давлением $p_2 = 400$ кПа и объемом $V_2 = 4{,}5$ л.

Определите максимальную температуру газа в этом процессе, если известно, что его график в координатах p, V представляет собой прямую линию. Количество газа $\nu = 0{,}75$ моль.

Построим график изменения состояния газа в координатах p, V (рис. 5, *а*). Для определения максимальной температуры газа T_{max} в этом процессе запишем уравнение прямой 1 — 2:

$$p = a - bV, \text{ где } a = p^0,\ b = \operatorname{tg}\varphi.$$

Перейдем к переменным T, V, используя уравнение состояния идеального газа

$$pV = \nu RT:$$

$$aV - bV^2 = \nu RT.$$

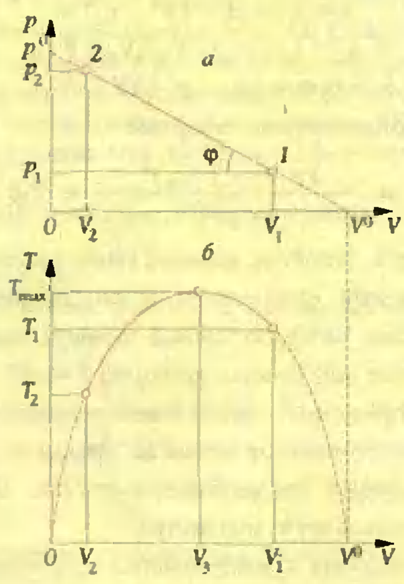


Рисунок 5

Это уравнение параболы, проходящей через начало координат (рис. 5, *б*). Ее корни равны

$$V = 0 \text{ и } V^0 = a/b,$$

а ось симметрии проходит через точку $V_3 = a/(2b)$. Объему V_3 и соответствует искомая температура:

$$T_{max} = \frac{a}{\nu R}V_3 - \frac{b}{\nu R}V_3^2 = \frac{a^2}{4\nu Rb}.$$

Заметим, что это же равенство легко

практикум

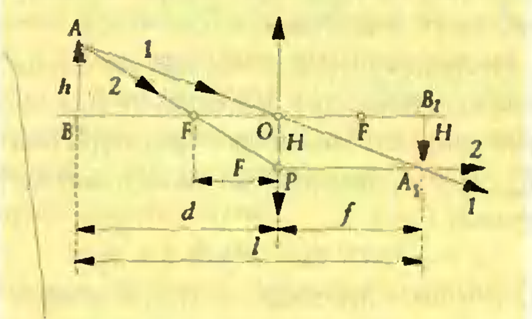


Рисунок 6

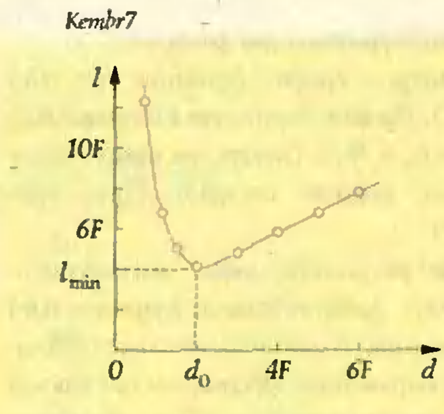


Рисунок 7

получить, исследуя уравнение параболы на экстремум с помощью производных.

Теперь найдем параметры a и b (см. рис. 5, a):

$$a = p^0 = p_2 + (p^0 - p_2) =$$
$$= p_2 + (p_2 - p_1)V_2/(V_1 - V_2),$$
$$b = \operatorname{tg}\varphi = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2).$$

Тогда окончательно получим

$$T_{\max} = \frac{(p_2V_1 - p_1V_2)^2}{4\nu R(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)} = 568 \text{ K}.$$

Задача 4. Найдите минимальное расстояние между предметом и его действительным изображением в тонкой линзе, фокусное расстояние которой $F = 40$ см.

Изображение будет действительным, если расстояние от линзы до предмета $d > F$. Построим это изображение (рис. 6) и найдем искомую величину l.

Из подобия прямоугольных треугольников ABO и A_1B_1O, а также треугольников ABF и OPF следует, что $H/h = f/d$ и $H/h = F/(d - F)$, где H — линейный размер изображения, h — линейный размер предмета, f — расстояние от линзы до изображения. Тогда

$$l = d + f = d^2/(d - F).$$

Это же соотношение можно получить, используя формулу линзы $1/F = 1/d + 1/f$ и равенство $l = d + f$.

График функции $l = l(d)$ представлен на рисунке 7. Кривая имеет минимум: $l_{\min} = 4F$ при $d = d_0 = 2F$. Значения d_0 и $l_{\min}$ можно определить и аналитически. Возьмем производную от функции l по аргументу d и приравняем ее к нулю:

$$l' = (2(d - F)d - d^2)/(d - F)^2 = 0.$$

Отсюда найдем два значения величины d: $d_1 = 0$ и $d_2 = 2F$.

Действительному изображению ($d > F$) соответствует второе из них. Следовательно,

$$d_0 = d_2 = 2F,$$
$$l_{\min} = d_0^2/(d_0 - F) = 4F = 1{,}6 \text{ м}.$$

Упражнения

1. Из точки, находящейся на высоте h, бросают со скоростью v_0 камень под некоторым углом к горизонту. Найдите максимально возможную дальность полета камня.

Указание: считая дальность s известной, составьте квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$ и приравняйте к нулю его дискриминант.

2. Тяжелый шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. При движении шарика вертикальная составляющая скорости его движения сначала возрастает, а затем убывает. Какой угол образует нить с вертикалью в тот момент, когда эта составляющая наибольшая? Потери энергии не учитывайте.

3. Одна частица сталкивается с другой, неподвижной, частицей. При каком соотношении их масс доля передаваемой второй частице энергии максимальна? Систему считайте замкнутой, удар — лобовым и абсолютно упругим.

4. К источнику электрической энергии с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r подключен резистор. Начертите график зависимости выделяющейся в резисторе тепловой мощности P от его сопротивления R. При каком сопротивлении мощность максимальна? Какова эта мощность?

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА. ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$7\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=1.$$

2. Диагонали четырехугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, причем $\angle SAD=50^\circ$, $\angle PQS=70^\circ$, $\angle RQS=60^\circ$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на ее продолжении? Ответ обоснуйте.

3. Даны числа p и q такие, что $p=\log_z y$, $q=\log_x y$. Найдите число

$\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)} \sqrt[3]{xyz}$, считая, что оно определено.

4. Один рабочий на новом станке производит за 1 час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

5. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB=27$ и $BC=18$. Найдите расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

6. Найдите все значения x, при каждом из которых неравенство

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ и $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$ больше?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1+\cos 4x}\,\sin x=2\sin\frac{\pi}{4}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(11-x)+\log_2(x+1)\le \log_2((x+1)\times(x^2+5x-5)).$$

4. Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут. Найдите время отправления мотоцикла из города B.

5. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3}<\sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется для всех x из отрезка $[\pi;2\pi]$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство $1-2x^2>2x$.

2. Решите уравнение $5-3\cos 2x=8\sin x$.

3. Решите уравнение $2\log_2 x^3-1=\dfrac{1}{2}\log_2 x$.

4. Площадь треугольника ABC равна S, $\angle BAC=\alpha$, $AC=b$. Найдите BC.

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

6. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC. Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q. Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

7. Известно, что некоторая нечетная функция при $x > 0$ определяется формулой $f(x) = \log_3\left(\frac{x}{3}\right)$. Найдите, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x < 0$. Решите уравнение $f(x) = 3$.

8. Три шара с одинаковым радиусом R касаются друг друга и каждый из них касается боковой поверхности конуса. Центры шаров находятся вне конуса. Высота конуса перпендикулярна плоскости α, содержащей центры шаров. Угол между высотой конуса и его образующей равен φ. Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости α.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение
$x + 1 + \log_{1/3}(-2 + 3^{-x}) = 0$.

2. Решите неравенство $\sqrt{2\sin x} < 1$.

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $150°$, а основание AD равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD, проходящей через вершину A и пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D.

4. Даны три сплава. Состав первого сплава: 55% хрома и 45% никеля; второго — 60% никеля, 25% хрома и 15% кобальта; третьего — 70% хрома и 30% кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20% кобальта. Какие значения может принимать процентное содержание никеля в этом новом сплаве?

5. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение
$2x - |x - k^2| = 11k - 3|x + 4k|$
а) не имеет решений; б) имеет конечное непустое множество решений.

Вариант 5

(биологический факультет)

1. Найдите все решения уравнения
$4\cos^2(6x + \frac{\pi}{6}) = 1$.

2. Решите уравнение
$\log_2\left(\frac{x-9}{x-4}\right) + \log_2(x^2 - 14x + 40) = 2 + \log_2 3$.

3. Дана окружность, диаметр MN которой равен 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше чем 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найдите площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72.

4. Найдите все пары целых чисел p, q, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:
$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$$

5. Найдите наименьшее значение величины
$$\frac{1}{r}\left(\frac{4p}{u} + \frac{q}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$
где p, q, r, u, v — положительные числа, удовлетворяющие условиям:
$$\begin{cases} pv + q\sqrt{1-u^2} \le r, \\ p^2 + 2qr\sqrt{1-u^2} \ge q^2 + r^2, \\ 2qr\sqrt{1-u^2} + q^2\dfrac{1-v^2-u^2}{v^2-1} \ge r^2. \end{cases}$$

Вариант 6

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение
$2(\cos 6x + \sin 2x \cos 4x) = \sin 6x + \sin 2x$.

2. Самолет, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях А, Б или В с одной и той же скоростью, но поразному расходуя горючее. В первый раз самолет находился в метеоусловиях А половину полетного времени, в метеоусловиях Б — треть времени, в метеоусловиях В — 1/6 полетного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях А и 3/4 — в метеоусловиях В. В третий раз — по четверти полетного времени в метеоусловиях А и Б, а половину времени — в метеоусловиях В. На сколько процентов израсходует самолет полетный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях В, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\%$, во второй — на 92,5%, а в третий — на 97,5%?

3. Решите уравнение
$$\frac{9^x - 82\cdot 3^x + 162 - 3^{x/2+2}}{3^{x/2} - 9} = -9.$$

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2, лежащими на стороне MN треугольника MPN, касаются друг друга извне и пересекают стороны MP и PN в точках M, D и N, C соответственно, причем $MO_1 = O_1D = 3$ и $NO_2 = CO_2 = 6$. Найдите площадь треугольника MNP, если известно, что отношение

площади треугольника MCO_2 к площади треугольника O_1DN равно $\frac{8}{5}\sqrt{3}$ и $PN = MP\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству
$3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0$.

Вариант 7
(геологический факультет)

1. Пятый член арифметической прогрессии равен 22, а сумма седьмого и девятого равна 32. Найдите сумму первых двадцати трех членов этой арифметической прогрессии.

2. Решите неравенство $\sqrt{6x+5} - 3x \le 2$.

3. Решите уравнение
$\left|3\log_x x^4 + 7\log_7 2 \cdot \log_2 x^2\right| = -\log_x 49$.

4. Решите уравнение
$$\cos x\cos 3x - 9\cos^2 x + 5 = 14\sin x\sin 3x - 30\sin^2 x.$$

5. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AD = 7$, $BC = 3$, угол $BCD = 120°$. Хорда BM окружности пересекает отрезок AD в точке N такой, что $ND = 2$. Найдите площадь треугольника BOM.

6. Найдите все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению
$$x^2 + 1 - 2x\sin\pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)(\cos 2\pi y + \cos\pi z)^2.$$

Вариант 8
(географический факультет)

1. Решите уравнение
$\cos 2x + 4\cos x + 3 = 0$.

2. Найдите три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение
$ax^2 + bx + c = 0$
имеет единственное решение $x = 2$.

3. Решите неравенство
$(\log_x 9 - 1)\log_3(9x) \le 3$.

4. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

5. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение
$\left|x^2 - 2x\right| + \left|x^2 - 3x + 2\right| = x^2 - 4x + c$
имеет ровно три различных решения.

Вариант 9
(экономический факультет)

1. Вычислите
$\log_{11/25}|\sin 3\beta| + \log_{11/25}|\sin\beta|$,
если $\sin(\beta - \frac{\pi}{4}) + \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2/5}$.

2. Решите неравенство
$(2 - 3^{x-5} - 3^{5-x})^{-1}(x^2 - 7x + 10)\sqrt{x+1} \ge 0$.

3. Цех получил заказ на изготовление 5000 деталей первого типа и 3000 деталей второго типа. Каждый из 187 рабочих цеха затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он мог бы изготовить 3 детали второго типа. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

4. В треугольной пирамиде $KLMN$ плоские углы LKN и MKN при вершине K равны $\pi/4$ и $3\pi/4$ соответственно. Угол между гранями LKM и MKN равен $\pi/2$. Определите плоский угол LKM.

5. Продолжения сторон KN и LM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон KL и MN — в точке Q. Отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла KQN. Найдите длину стороны MN, если $KQ = 6$, $NQ = 4$, а площади треугольника LQM и четырехугольника $KLMN$ равны.

6. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства
$x^2 + 3x + 3|x + b| - b \le 0$ максимально.

Вариант 10
(факультет психологии)

1. Решите неравенство
$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \le \frac{\sin x - 3}{\sqrt{2}}.$$

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 400 \cdot 5^y \cdot 50^x \cdot 100^{x+y} = 1, \\ \log_{0,5x+0,4y}\left(8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y}\right) \times \\ \qquad \times \log_{41}(0,5x + 0,4y) = 1. \end{cases}$$

3. Трапеции $ABCD$ и $ACDE$ с равными бóльшими основаниями, соответственно AD и AC, вписаны в одну окружность. Чему равен радиус этой окружности, если площадь треугольника ADE равна $1 + \sqrt{3}$, а угол COD равен $60°$, где O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$?

4. Найдите все значения параметров u, v, при которых существуют два различных корня уравнения $x(x^2 + x - 8) = u$, являющихся одновременно корнями уравнения $x(x^2 - 6) = v$.

5. В тетраэдре $PQRS$ соединены отрезками следующие пары точек: точка F на ребре PQ с точкой G на ребре RS, точка O на ребре QS с точкой N на ребре PR, а также точки X, Y — середины ребер PS и QR соответственно. Отрезки FG, ON, XY пересекаются в одной точке. Определите площадь четырехугольника $FOGN$, если $PS = QR = PQ = 5$, $PF = 3$, а угол между скрещивающимися прямыми PS и QR равен $60°$.

Вариант 11

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{(\sqrt{3}\sin x - \cos x)^2}{2\sin 2x - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Решите неравенство

$\log_x(x^2 - x^3 + 21x) \geq 3$.

3. Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причем $CN = 2CM$ и угол MNK равен $120°$. Найдите отношение косинусов углов CKN и CLM.

4. Расстояние между портами P и Q равно 120 км. Из P в Q вышел теплоход, а спустя 1 час — катер, скорость которого равна 45 км/ч. Катер догнал теплоход в точке R и повернул обратно. Когда теплоход прибыл в Q, катер прошел половину пути от R к P. Найдите скорость теплохода.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 12

(институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение $2^{x+5} + 2^3 \cdot 2^{x-1} - 2^2 = 0$.

2. Решите уравнение

$3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0$.

3. Решите неравенство

$$\frac{|x-5| - 1}{2|x-6| - 4} \leq 1.$$

4. Дан треугольник со сторонами 4; 8; 9. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

5. Решите неравенство

$\log_{1/2}|\cos x| \log_5(x^2 - 9) < 0$.

6. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

ФИЗИКА. ЗАДАЧИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. На горизонтальной плоскости стоят два кубика одинаковых размеров, имеющие массы m_1 и m_2. Коэффициенты трения кубиков о плоскость μ_1 и μ_2. К первому кубику прикладывают силу $\vec{F}$, линия действия которой проходит через центры обоих кубиков перпендикулярно боковым граням. Кубики скреплены легкой недеформированной (в исходном состоянии) пружиной, ось которой совпадает с линией действия силы $\vec{F}$. При какой величине этой силы второй кубик сдвинется с места?

2. В вертикальную стенку на одной высоте и на расстоянии $2l$ друг от друга вбиты два гвоздя, через которые перекинута тонкая невесомая нерастяжимая нить. К концам нити и ее середине прикреплены грузы одной и той же массы m (средний груз находится на одинаковых расстояниях от гвоздей). Вначале грузы удерживаются так, что средняя часть нити горизонтальна, затем грузы отпускают без начальной скорости. Какую скорость будет иметь средний груз, проходя положение равновесия? Трение не учитывайте.[1]

3. На наклонной плоскости с углом α находится кубик (рис. 1). К кубику прикреплена невесомая пружина, другой конец которой закреплен в неподвижной точке A. В исходном состоянии кубик удерживается в положении, при котором пружина не деформирована. Кубик отпускают без начальной скорости. Определите максимальную скорость кубика в процессе движения. Масса кубика m, жесткость пружины k, коэффициент трения кубика о наклонную плоскость $\mu (\mu < \operatorname{tg}\alpha)$.

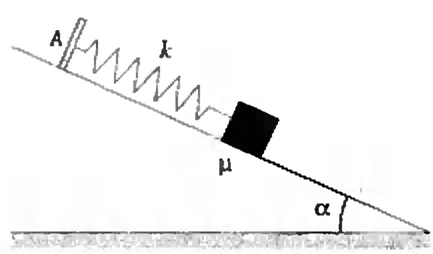


Рисунок 1

[1] *Здесь и далее ускорение свободного падения считайте известным и равным $g = 10$ м/с².*

4. В неподвижной горизонтальной трубе, внутренний радиус которой R, катается без проскальзывания вблизи положения равновесия отрезок тонкостенной трубы радиусом $r \ll R$. Оси труб параллельны. Найдите период колебаний с малой амплитудой.

5. Цикл бензинового двигателя внутреннего сгорания близок к циклу Отто, состоящему из двух адиабат и двух изохор. Вначале горючую смесь, которую можно считать идеальным газом, сжимают без теплообмена с окружающей средой, потом изохорически нагревают (при сгорании топлива) на $\Delta T_1 = 500$ К, затем снова без теплообмена газ расширяется, совершая работу, и наконец, после изохорического охлаждения на $\Delta T_2 = -250$ К газ возвращается к исходному состоянию. Найдите КПД этого цикла. Теплоемкость газа в обоих изохорических процессах считайте одинаковой.

6. Кольцо прямоугольного сечения сделано из однородного плохо проводящего материала с удельным сопротивлением ρ. Кольцо помещено в область с однородным магнитным полем, перпендикулярным плоскости кольца, причем индукция поля линейно возрастает со временем по закону $B = At$ ($A = \text{const}$). Найдите зависимость плотности индукционного тока от расстояния R до оси кольца.

7. Медное кольцо радиусом r соединено проводящими спицами с центром (рис. 2). Через скользящие контакты к кольцу подключен резистор сопротивлением R. На кольцо намотана невесомая нить, к концу которой прикреплен груз массой m. Пренебрегая трением, определите установившуюся скорость груза, если кольцо пронизывается внешним магнитным полем, индукция $\vec{B}$ которого перпендикулярна плоскости кольца.

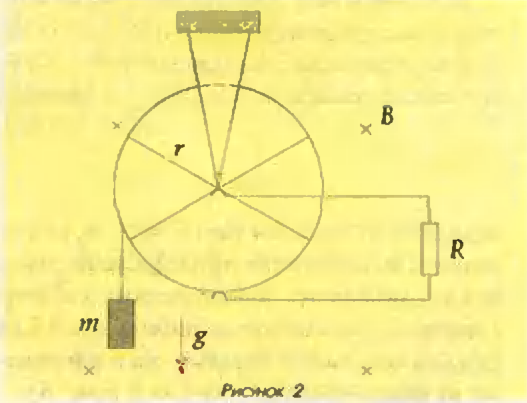


Рисунок 2

8. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника с ЭДС $\mathcal{E}_0$, конденсатора емкостью C, катушки индуктивности с малым омическим сопротивлением и ключа. Вначале ключ разомкнут, а конденсатор не заряжен. Затем ключ замыкают. Какое количество теплоты выделится на омическом сопротивлении за то время, пока электрические колебания в цепи полностью не затухнут? Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь.

9. Наблюдатель, перемещаясь по вертикали, определяет углы, образованные с вертикалью лучами, исходящими от малого объекта, находящегося на дне озера. На высотах h_1 и h_2 от уровня воды в озере он определил углы α_1 и α_2 соответственно. Какова глубина озера? Показатель преломления воды n.

10. Плоская монохроматическая волна нормально падает на экран с двумя параллельными щелями, расстояние между которыми $d = 2{,}5$ мм (рис. 3). Интерференцию наблюдают на другом экране, расположенном на расстоянии $L = 5$ м от плоскости щелей. На этом экране в точках O_1 и O_2 наблюдаются светлые интерференционные полосы. На какое минимальное расстояние вдоль оси системы нужно сместить экран, чтобы в точках O_1 и O_2 оказались темные полосы?

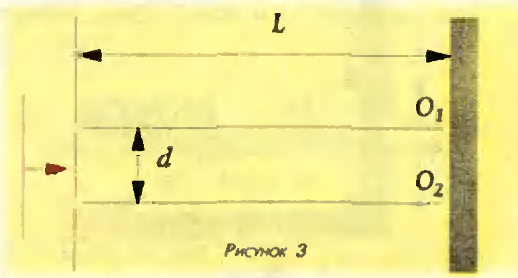


Рисунок 3

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. Катер, движущийся со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, буксирует спортсмена на водных лыжах (рис. 4). Трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол $\alpha = 150°$. Направление движения спортсмена образует с тросом

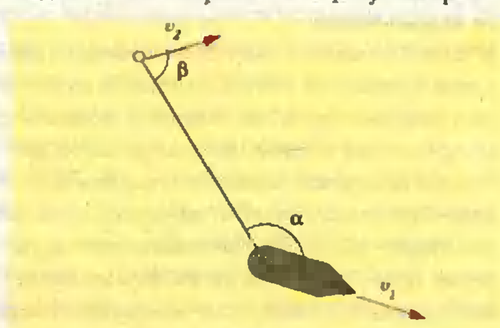


Рисунок 4

угол $\beta = 60°$. Чему равна скорость спортсмена (v_2) в этот момент времени?

2. С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. В момент падения камня на склон холма угол между направлением скорости камня и горизонтом составил $\beta = 60°$, а разность высот точек бросания и падения — $\Delta h = 5$ м. Найдите угол между направлением начальной скорости камня и горизонтом.

3. Два одинаковых маленьких шарика соединены жестким стержнем длиной $l = 60$ см. Стержень стоит вертикально вплотную к вертикальной плоскости (рис. 5). При смещении нижнего шарика вправо на малое расстояние система приходит в движение в плоскости рисунка. Найдите скорость нижнего шарика (v) в момент времени, когда верхний шарик находится на высоте $h = 40$ см над горизонтальной плоскостью. Считайте, что при движении шарики не отрываются от плоскостей, трением можно пренебречь.

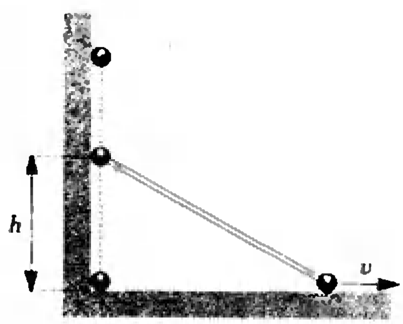


Рисунок 5

4. Объем тонкостенного цилиндрического сосуда высотой $H = 40$ см равен $V = 400$ см^3, его вес $P = 3{,}5$ Н. При температуре $t = 47$ °C и атмосферном давлении $p_0 = 100$ кПа сосуд переворачивают вверх дном и погружают в жидкость плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3. При какой температуре сосуд утонет? Атмосферное давление считайте неизменным.

5. В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При температуре T, одинаковой во всем цилиндре, объем нижней части цилиндра равен объему верхней части. Каким будет отношение объемов, если температуру газа увеличить в $n = 2$ раза?

6. В цилиндрическом сосуде 1 под поршнем массой $m = 5$ кг находится одноатомный идеальный газ (рис. 6). Сосуд 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же сосудом 2, в котором под поршнем массой $M = 10$ кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном состоянии кран K закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова, поршень в сосуде 2 расположен на высоте $H = 10$ см от дна. На какое расстояние передвинется поршень в сосуде 1 после открывания крана? Объемом трубки с краном можно пренебречь, атмосферное давление не учитывайте.

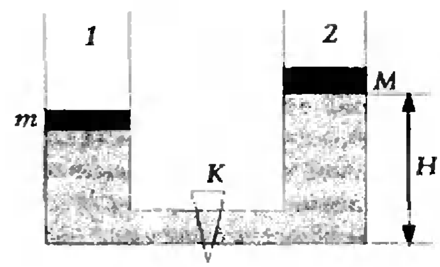


Рисунок 6

7. Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору сопротивлением R_1, то он показывает напряжение $U_1 = 6$ В, если параллельно R_2, то — $U_2 = 4$ В (рис. 7). Каковы будут напряжения на резисторах, если вольтметр не

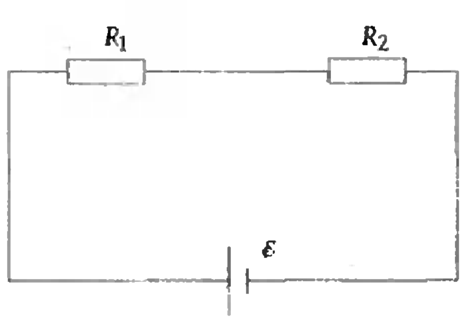


Рисунок 7

подключать? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

8. Два одинаковых гальванических элемента с внутренними сопротивлениями $r = 0{,}2$ Ом каждый соединены параллельно и нагружены на внешнее сопротивление R (рис. 8). Если эти элементы соединить последовательно, то мощность, выделяющаяся в том же сопротивлении нагрузки, возрастет в $k =$

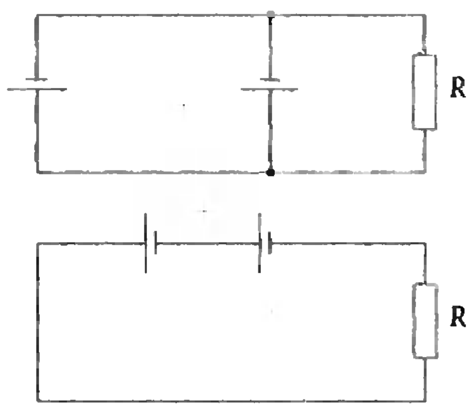


Рисунок 8

$=2{,}25$ раза. Чему равно сопротивление нагрузки R?

9. На рисунке 9 представлены светящаяся точка S и ее изображение S_1, даваемое линзой, главная оптическая ось которой — прямая OO_1. Расстояния от точек S и S_1 до оптической оси равны, соответственно, $a = 20$ см и $b = 30$ см, расстояние между точками A и B равно $c = 15$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

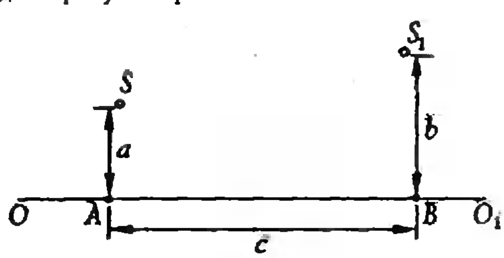


Рисунок 9

10. Отрезок AB, лежащий на главной оптической оси линзы за ее фокусом F, сместили параллельно самому себе и перпендикулярно оптической оси в положение $A'B'$, как показано на рисунке 10. Чему равна величина смещения (d), если длина изображения отрезка $A'B'$ больше длины изображения отрезка AB в $k = 2$ раза? Фокусное расстояние линзы $F = 3$см.

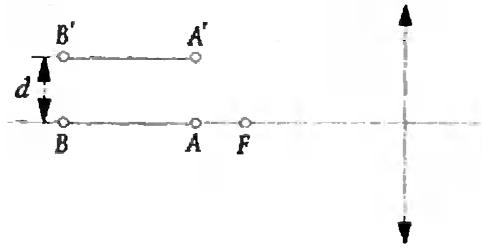


Рисунок 10

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

1. Самолет летит по дуге окружности радиусом $R = 1$ км, сохраняя одну и ту же высоту $h = 1{,}5$ км. С интервалом времени $\tau = 10{,}5$ с ($= 10\pi / 3$ с) с него сбрасывают два мешка. На каком расстоянии друг от друга упадут эти мешки на землю, если скорость самолета $v = 100$ м/с? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. При торможении от скорости $v_1 = 40$ км/ч до полной остановки автомобиль прошел путь $s_1 = 16$ м. Какой путь пройдет этот автомобиль на той же дороге при снижении скорости от $v_3 = 100$ км/ч до $v_2 = 60$ км/ч? Считайте, что ускорение при торможении постоянно и одинаково в обоих случаях.

3. Брусок массой $m = 1$ кг покоится на горизонтальной шероховатой поверхности (рис. 11). К нему прикреплена пружина жесткостью $k = 20$ Н/м. Какую работу нужно совершить для того, чтобы сдвинуть с места брусок, растягивая пружину в горизонтальном направлении, если коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}2$?

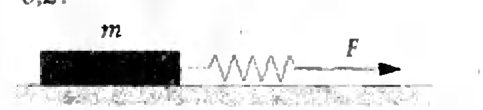


Рисунок 11

4. Человек массой $M = 70$ кг, неподвижно стоявший на коньках, бросил вперед в горизонтальном направлении снежный ком массой $m = 3{,}5$ кг. Какую работу совершил человек при броске, если после броска он откатился назад на расстояние $s = 0{,}2$ м? Коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}01$.

5. Легкую сферу массой $m = 80$ г взвешивают в воздухе. При температуре воздуха $t = 47$ °С вес сферы оказался равным $P = 0{,}1$ Н. При какой температуре воздуха сфера перестанет давить на чашку весов? Изменением объема сферы можно пренебречь, давление воздуха считайте неизменным.

6. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $W = 500$ Вт. При включении нагревателя на время $t_1 = 2$ мин температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении — понизилась за время $t_2 = 1$ мин на ту же величину ΔT. Какова масса нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c = 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

7. В схеме, показанной на рисунке 12, $\mathcal{E} = 60$ В, $C = 10$ мкФ. Какой заряд протечет в цепи, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

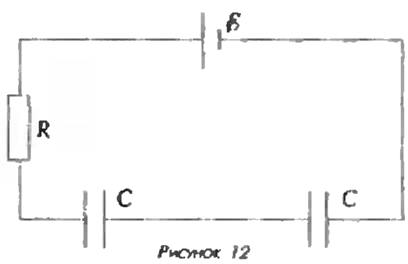


Рисунок 12

8. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ, предварительно заряженный до напряжения $U = 100$ В, подключают через резистор к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 300$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (рис. 13). Какое количество теплоты выделится в резисторе за время полной зарядки конденсатора?

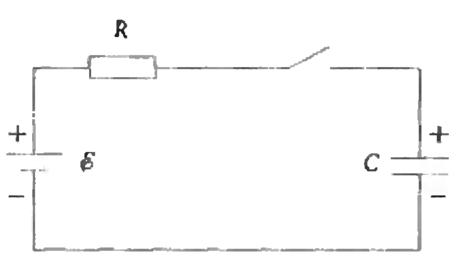


Рисунок 13

9. Высота Солнца над горизонтом составляет угол $\varphi = 10°$. Пользуясь зеркалом, пускают «зайчик» в водоем. Под каким углом к горизонту нужно расположить зеркало, чтобы луч света шел в воде под углом $\alpha = 41°$ к вертикали ($\sin\alpha \approx 0,655$)? Показатель преломления воды $n = 1,32$. Считайте, что нормаль к зеркалу лежит в вертикальной плоскости.

10. Луч света, идущий в плоскости рис.14, падает на переднюю грань стеклянного клина с углом $\beta = 45°$ между гранями. При каких значениях угла падения (α) луч выйдет через вторую грань клина? Показатель преломления стекла $n = \sqrt{2}$.

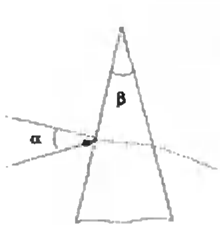


Рисунок 14

ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. Тело массой $m = 100$ г падает с высоты $h = 5$ м на чашу пружинных весов (рис. 15) и сжимает пружину жесткостью $k = 10^3$ Н/м на величину x. Определите x,

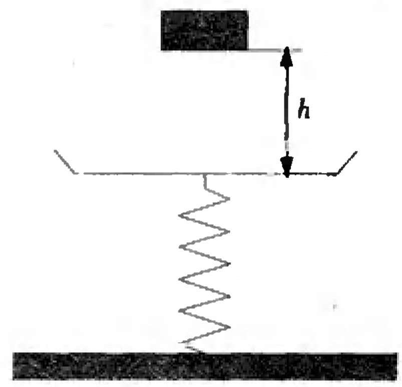


Рисунок 15

если массы чаши и пружины весов пренебрежимо малы.

2. В цилиндрическом сосуде с несмешивающейся с водой жидкостью, плотность которой $\rho = 1,2$ г/см^3, при температуре $t = 0$ °С плавает льдинка массой $m = 1$ кг. На какую величину изменится уровень этой жидкости в сосуде, когда льдинка растает? Площадь основания сосуда $S = 10^{-1}$ м^2.

3. Пластилиновый шар бросают на вертикальную стену, находящуюся на расстоянии $L = 5$ м от точки бросания, с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Шар прилипает к стене. Считая, что вся кинетическая энергия шара пошла на его нагревание, найдите изменение его температуры. Удельная теплоемкость пластилина $c = 2,5 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

4. Детский воздушный шарик, надутый гелием, удерживается привязанной к нему нитью. Радиус шарика $r = 15$ см, масса его оболочки $m_1 = 7,5$ г, масса гелия в нем $m_2 = 2,5$ г, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, температура воздуха $T = 300$ К. Найдите силу натяжения нити. Молярная масса воздуха $M = 0,029$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

5. Идеальный газ совершает круговой процесс $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ (рис. 16). Отдельные участки процесса представляют собой отрезки прямых. Известно, что $V_1 = 1$ м^3,

$V_2 = 4$ м^3, $T_1 = 100$ К, $T_4 = 300$ К. Какой объем занимал газ в состоянии *3*, находящемся на участке $2 \to 4$, которое характеризовалось тем же давлением, что и начальное состояние *1*?

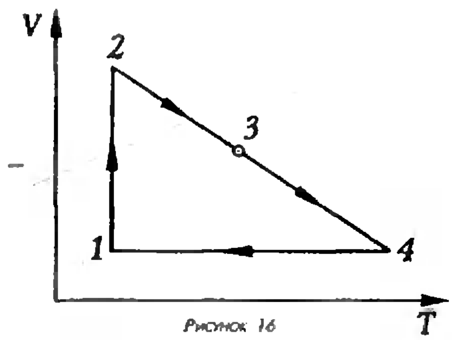


Рисунок 16

6. Источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом замыкают через резистор сопротивлением $R = 90$ Ом на незаряженный конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ. Какое количество теплоты выделится на внешнем резисторе к моменту полного заряда конденсатора?

7. Вакуумный диод, у которого анод и катод представляют собой параллельные пластины, работает в режиме, когда между током I и напряжением U выполняется соотношение $I = AU^{3/2}$. Во сколько раз увеличится средняя сила, действующая на анод со стороны подлетающих к нему электронов, если напряжение на диоде увеличить в $n = 2$ раза? Начальной скоростью электронов, вылетающих с катода, можно пренебречь. Удары электронов об анод считайте неупругими.

8. Проволочное кольцо радиусом $r = 0{,}1$ м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $R = 1$Ом, вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ Тл.

9. Сейсмическая упругая волна с частотой $\nu = 0{,}5$ Гц и длиной волны $\lambda = 2{,}9$ км, падающая под углом $\alpha = 42°$ на границу раздела между двумя слоями земной коры с различными свойствами, испытывает преломление, причем угол преломления $\beta = 26°$. Найдите скорость волны во второй среде. ($\sin 42° = 0{,}67$, $\sin 26° = 0{,}44$.)

10. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см. На каком расстоянии от линзы нужно поместить плоское зеркало для того, чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя линзу, стали параллельными?

ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. Висячий мостик (рис. 17), имеющий форму дуги окружности радиусом $R = 4$ м, выдерживает максимальную нагрузку $P = 1000$ Н. С какой максимальной скоростью может съехать по нему велосипедист, масса которого (вместе с велосипедом) $m = 90$ кг?

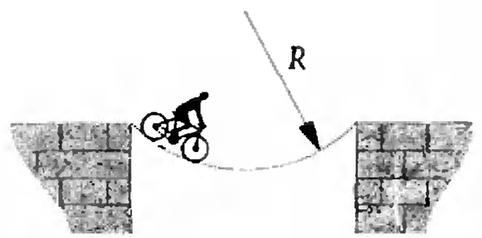


Рисунок 17

2. Тело массой $m = 1$ кг бросили с некоторой высоты с начальной скоростью, равной $v_0 = 20$ м/с и направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите кинетическую энергию тела через $t = 2$ с после начала его движения. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

3. Два тела, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 15$ м/с соответственно. После соударения первое тело остановилось. Какое количество теплоты выделилось при ударе?

4. Тонкостенный цилиндрический стакан массой $m = 30$ г, высотой $L = 10$ см и площадью дна $S = 60$ см^2 плавает в сосуде с керосином. В стакан наливают воду. Найдите максимальную высоту слоя воды в стакане (от его дна), при которой стакан еще не тонет. Плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м^3.

5. Найдите число атомов ртути, содержащихся в объеме $V = 1$ см^3 при температуре $t = 27$ °С, если давление пара ртути $p = 0{,}75$ Па. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

6. Объем пузырька воздуха по мере всплывания его на поверхность со дна озера увеличился в $k = 3$ раза. Определите глубину озера. Температуру воды считайте постоянной. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

7. Открытую пробирку с воздухом при давлении p_1 нагрели до температуры T_1, затем герметично закрыли и охладили до температуры $T_2 = 10$ °С. Давление при этом упало до $p_2 = 0{,}7p_1$. До какой температуры T_1

была нагрета пробирка? Тепловым расширением пробирки можно пренебречь.

8. Электрическая цепь состоит из включенных последовательно источника постоянного напряжения с внутренним сопротивлением $r = 3$ Ом, резистора сопротивлением $R = 47$ Ом, плоского воздушного конденсатора, площадь пластин которого равна $S = 200$ см^2, а расстояние между пластинами можно изменять. Если расстояние между пластинами $d = 1$ см, то заряд конденсатора $Q = 8{,}85 \cdot 10^{-10}$ Кл. Какой силы ток будет протекать через резистор, если пластины сдвинуть до соприкосновения? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

9. Когда ключ K замкнут, сопротивление между точками AB схемы, изображенной на рисунке 18, равно $R_1 = 80$ Ом. Определите сопротивление между этими точками, когда

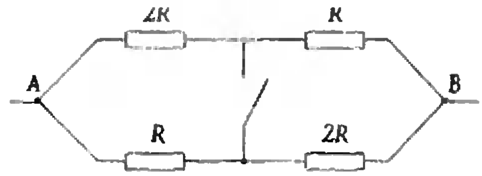


Рисунок 18

ключ разомкнут.

10. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если при изменении расстояния $d = 0{,}3$ м от предмета до линзы на $\Delta d = 0{,}1$ м расстояние от линзы до действительного изображения предмета увеличивается вдвое.

Публикацию подготовили В.Алексеев, А.Боголюбов, С.Волошин, И.Иновенков, С.Кротов, М.Потапов, В.Прошкин, А.Соколихин, С.Чесноков

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Независимый Московский университет — негосударственное высшее учебное заведение, основанное в 1991 году группой московских ученых — математиков и физиков. В настоящее время университет объединяет два колледжа — математический и математической физики, в которых обучаются студенты первого и второго курсов. Вступительные экзамены в Математический колледж проводились в 1991 и 1992 годах по математике (письменно) в 2 тура. Каждая задача оценивалась в баллах, задачи первого тура оценивались в 10 баллов, а задачи второго тура в 1991 году — в 15 баллов, в 1992 — в 20 баллов.

Вариант 1 (1991 г.)

Первый тур

1. Докажите, что треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда найдутся такие точки A' внутри стороны BC, B' внутри стороны AC и C' внутри стороны AB, что отрезки AA', BB' и CC' равны.

2. Найдите отношение радиуса шара, вписанного в правильный тетраэдр, к радиусу шара, описанного вокруг этого тетраэдра.

3. Существует ли бесконечная последовательность из 0 и 1 такая, что любая подпоследовательность, образованная элементами с номерами, составляющими арифметическую прогрессию, непериодична?

4. Для любых вещественных x и y выполняется неравенство

$f(x) - f(y) \le (x - y)^2$.

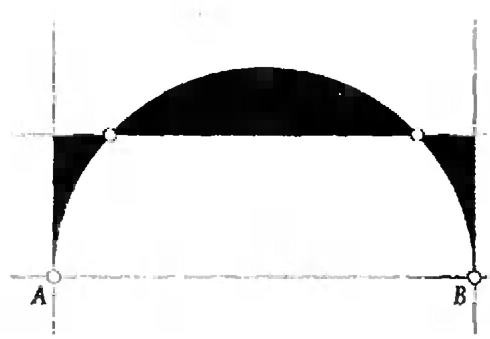
Найдите все такие функции f.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — некоторая перестановка чисел 1, 2, 3, ..., 100. Докажите, что сумма

$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + 100 \cdot a_{100}$

достигает наименьшего возможного значения для перестановки 100, 99, ..., 2, 1.

6. Дан отрезок AB, полукруг, построенный на нем как на диаметре, и две прямые, проходящие через точки A и B и касающиеся полукруга. Найдите прямую, параллельную AB и такую, чтобы сумма площадей трех криволинейных фигур — двух треугольников и одного сегмента (см. рисунок) была минимальной.



Второй тур

7. Докажите, что многочлен

$x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2nx + 2n + 1$

не имеет действительных корней.

8. Пусть L_1, L_2 — периметры правильных n-угольников — описанного вокруг окружности с длиной L и вписанного в эту окружность; S_1, S_2 — площади этих многоугольников, S — площадь круга. Докажите, что
а) $L_1 \cdot L_2 > L^2$; б) $S_1 \cdot S_2 < S^2$.

9. Докажите, что число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ разлагается в произведение не менее чем n простых сомножителей (не обязательно различных).

10. Назовем коэффициентом неравнобедренности треугольника ближайшее к единице из отношений его сторон. Какие значения может принимать коэффициент неравнобедренности?

Вариант 2 (1992г.)

Первый тур

1. Пространственный неплоский шестиугольник имеет три пары параллельных противоположных сторон. Докажите, что в каждой из этих пар стороны равны.

2. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность (a_n) неотрицательных целых чисел, для которой при любых i и j выполняется равенство $a_{i \cdot j} = a_i + a_j$?

3. Известны расстояния a, b, c от точки M пространства до вершин A, B, C прямоугольника $ABCD$. Чему может быть равно расстояние от M до вершины D?

4. Найдите $\max\{x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n\}$, если $x_1, \ldots, x_n$ — неотрицательные действительные числа, причем $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

5. Проведите через точку P внутри данного угла отрезок MN с концами на сторонах угла так, чтобы произведение $MP \cdot PN$ было наименьшим.

6. Все вершины равнобочной трапеции лежат на параболе. Докажите, что основания трапеции перпендикулярны оси параболы.

Второй тур

7. Докажите, что

$$\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2 + 9}\, dx \cdot \int_{3}^{5} \sqrt{x^2 - 9}\, dx < 200.$$

8. Существует ли рациональная функция $R(x)$, не являющаяся константой, такая что для любого x, для которого она имеет смысл, выполняются два равенства:
а) $R(x) = R(1/x)$;
б) $R(x) = R(1 - x)$?
($R(x)$ называется рациональной функцией, если ее можно представить как $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, где p и q — многочлены, причем q — ненулевой.)

9. Рассмотрим четыре угла между плоскостями граней правильного тетраэдра и некоторой фиксированной плоскостью.
а) Докажите, что косинусам этих углов можно приписать знаки так, что их сумма будет равна нулю.
б) Докажите, что сумма квадратов косинусов этих углов равна $4/3$.

Публикацию подготовили В. Имайкин, Н. Константинов

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

[illegible]

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. Два самолета летят навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v. Завидев друг друга на расстоянии L, пилоты начинают разворот по окружностям, оставаясь в горизонтальной плоскости и не меняя величин скоростей. Найдите минимальное расстояние между самолетами, если повороты выполняются с одинаковыми ускорениями a. (61%)

2. В объеме V_0 при температуре T_0 и давлении p находился воздух, содержащий некоторое количество озона O_3. После долгого выдерживания в тени озон полностью превратился в молекулярный кислород O_2, и при том же давлении температура воздуха стала T, а объем V. Найдите начальное число молей озона. (62%)

3. Между вертикальными проводящими рельсами, расположенными на расстоянии l друг от друга, последовательно включены конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R (рис. 1). Сверху рельсы замкнуты горизонтальной идеально проводящей планкой массой m. Перпендикулярно плоскости приложено однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Планку толкают вниз, и она начинает скользить по рельсам без трения. При какой начальной скорости планки (v_0) в цепи будет течь постоянный ток? (43%)

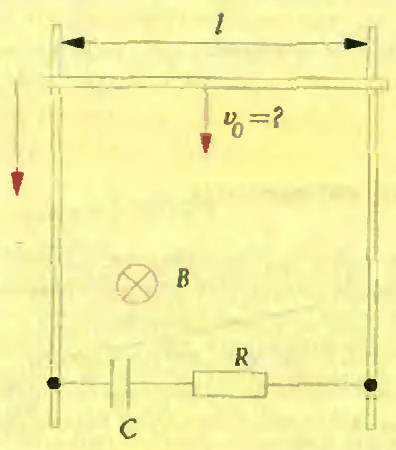


Рисунок 1

4. Наливая молоко, вы пролили его на клеенку и обнаружили, что под слоем молока еле заметен ее рисунок. Полагая, что молоко представляет собой взвесь маленьких шариков жира в воде, оцените размер этих шариков. (22%)

5. На наклонной плоскости находятся два соприкасающихся друг с другом цилиндра (рис. 2). Нижний цилиндр начинают медленно спускать без вращения. При этом верхний цилиндр в случае малого наклона плоскости к горизонту вращается, а в случае большого наклона — скользит без вращения. Объясните явление. (60%)

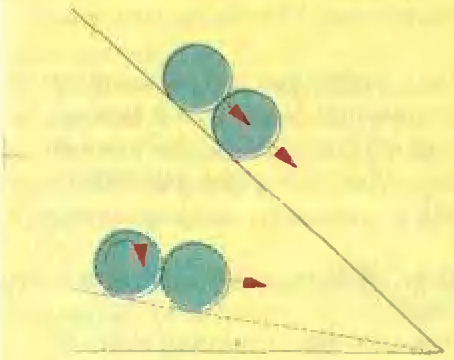


Рисунок 2

Вариант 2

1. Трубка погружена открытым концом в сосуд с ртутью, плотность которой ρ. Высота столбика воздуха в трубке h_1, а высота столбика ртути относительно ее уровня в сосуде H_1. Затем трубку погружают в ртуть еще больше, так что через достаточно большое время эти высоты оказываются равными h_2 и H_2 соответственно. Найдите атмосферное давление. (86%)

2. Тело массой m соскальзывает с наклонной плоскости с ускорением a. Каким будет ускорение, если тело прижать с силой N еще одной плоскостью, параллельной наклонной? Коэффициенты трения скольжения между телом и плоскостями одинаковы и равны μ. (70%)

3. Конденсатор емкостью C после замыкания ключа K_1 начинает разряжаться через резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L (рис. 3). В момент, когда ток в

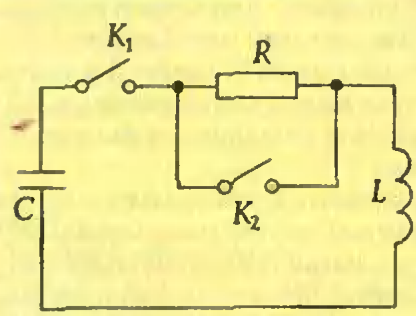


Рисунок 3

цепи достигает максимального значения I_0, замыкают ключ K_2. Чему равны напряжение на катушке непосредственно перед замыканием ключа K_2 и максимальный ток в цепи при последующих колебаниях? (30%)

4. На рычажных весах в открытых сосудах при температуре 0 °С уравновешены литр воды и соответствующий кусок льда. Лед растаял. Оцените, сколько воды и куда нужно добавить, чтобы восстановить равновесие. (44%)

5. В прозрачный цилиндрический сосуд с водой опущен вертикальный непрозрачный цилиндр. Его обводят по окружности так, что поверхность цилиндра касается стенки сосуда. В некоторый момент обводки кажется, что цилиндр «заполнил» весь сосуд. Объясните явление. (44%)

Вариант 3

1. Имеются N собирающих линз с фокусным расстоянием F и N рассеивающих линз с фокусным расстоянием — $F/2$. Линзы установлены поочередно так, что расстояние между соседними линзами равно $F/2$ (рис. 4). Вдоль оси в систему входит параллельный пучок света диаметром D. Найдите диаметр выходящего пучка. (55%)

2. Частица с зарядом q и массой m налетает со скоростью v на неподвижную стенку перпендикулярно ее поверхности. В этот момент включается однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, параллельное стенке и перпендикулярное скорости частицы. Стенка отражает частицу, увеличивая ее скорость при каждом отражении на величину u. Найдите расстояние между точками 1-го и k-го отражений. (55%)

3. Невесомый стержень OA длиной l с грузиком массой m на конце может вращаться без трения вокруг точки O, расположенной на поверхности стола. Другой грузик — массой M — прикреплен к первому при помощи нерастяжимой нити, пропущенной через отверстие в столе на расстоянии $l/2$ от точки O. В начальный момент стержень вертикален, его скорость равна нулю. Далее стержень отпускают. Найдите скорость грузика массой m в момент, когда он коснется поверхности стола. (41%)

4. Оцените, во сколько раз среднее расстояние между молекулами пара над кипящей водой больше расстояния между молекулами воды. (42%)

5. Электрическая лампочка $Л$ подключена через диод D к источнику переменного напряжения (к сети). Параллельно диоду с помощью ключа K может быть присоединен конденсатор C (рис. 5). При замкнутом ключе лампочка горит заметно ярче, чем при разомкнутом. Объясните явление. (78%)

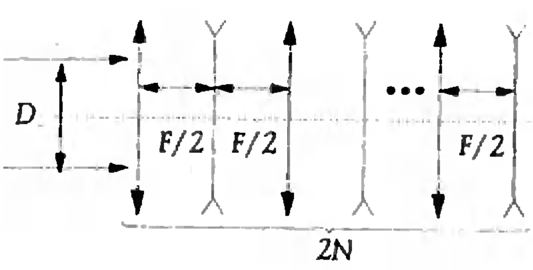


Рисунок 4

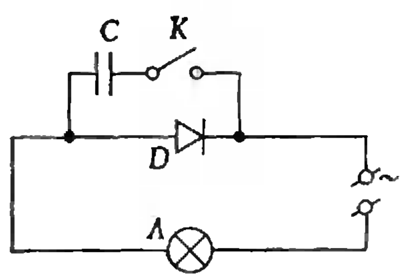


Рисунок 5

Публикацию подготовил Г. Меледин

ПЕРВЫЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА

ГОЛОВОЛОМКИ КАК ВИД СПОРТА

Прошлым летом в Нью-Йорке прошел 1-й чемпионат мира по головоломкам. Насколько необычно звучит название этих соревнований, настолько же необычным было их содержание.

В начале года в 13 странах прошли отборочные соревнования, и по 4 сильнейших представителя от каждой страны были посланы в Нью-Йорк.

Головоломки отвечали двум требованиям: новизна и независимость от языка. Одни головоломки можно было решать сообща, другие распределялись между членами команды. Каждая задача оценивалась в баллах, и за отведенное время нужно было набрать максимальное их количество.

Для первого дня организаторы приготовили более легкие задачи: лабиринты, числовые задачи, геометрические головоломки, зрительные задачи на определение объектов и поиск различий, восстановление сюжетов по перепутанным картинкам, буквенные головоломки, тесты на память, перестановочные головоломки. Во второй день были предложены вероятностные головоломки, разгадывание слов, нахождение спрятанных изображений, задачи на упаковку.

Самым твердым орешком оказалась головоломка известного японского изобретателя Нобо Иошигохары. Внешне оно выглядело очень скромно — деревянный ящичек, в который нужно уложить 7 деревянных брусочков.

Сам Иошигохара, сидевший за столом жюри, после того, как начался отсчет времени, раз пять повторил: «Хоть бы кто-нибудь решил эту задачу»,— но это не помогло. Отведенные 15 минут истекли, и никто не справился с головоломкой. Тогда, в соответствии с условиями, изобретатель показал всем правильную укладку первого бруска, и опять начался отсчет времени. В течение следующей 15-минутки команде Хорватии удалось решить задачу. После этого было показано место второго бруска, и тогда успеха добились еще две команды: Японии и Словении. США, Канада, Аргентина и Турция справились с задачей после трех подсказок, остальным понадобилось четыре.

По итогам двух дней места распределились так: 1 — США, 2569 очков; 2 — Аргентина, 2224; 3 — Польша, 2134; 4 — Канада, 2103; 5 — Турция, 2066; 6 — Чехо-Словакия, 1908; 7 — Словения, 1782; 8 — Япония, 1664; 9 — Голландия, 1661; 10 — Хорватия, 1609; 11 — Финляндия, 1149; 12 — Германия, 1118; 13 — Венгрия, 737.

Конечно, жаль, что мы с вами не были летом прошлого года в Нью-Йорке. Но может быть, не все потеряно, и осенью этого года мы с вами сумеем попасть на 2-й чемпионат мира, в чешский город Брно? Во всяком случае, если вы за 2—3 часа решите 6 головоломок, показанных на этих страницах, вы можете считать себя кандидатом в сборную России. Сообщите нам в редакцию о ваших достижениях, и если удастся найти организаторов и спонсоров для сборной, у вас есть шанс поехать на второй и следующие чемпионаты мира, заявки на организацию которых уже поданы Аргентиной и Турцией.

А на вопрос, как стать чемпионом мира, ответил абсолютный победитель в личном зачете 1-го чемпионата, канадец Дэвид Сэмуэль. Он сказал: «Я всегда решал все головоломки, которые попадались мне на глаза». Чемпион мира — доктор философии, кандидат компьютерных наук, ему 31 год.

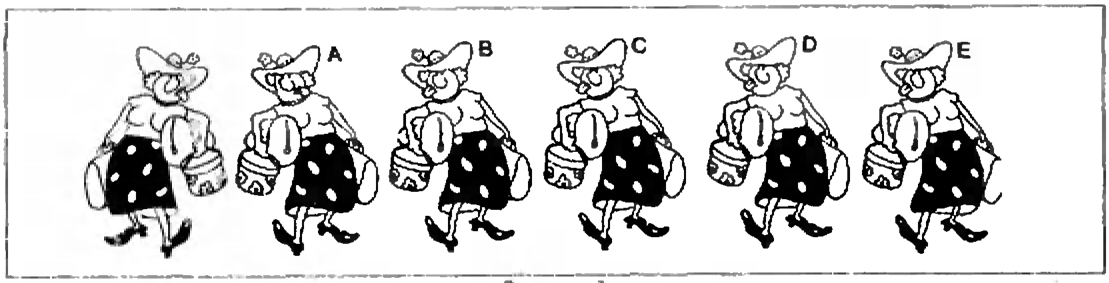


Рисунок 1

Какое из изображений — A,B,C,D или E — является точным зеркальным отражением крайней левой картинки?

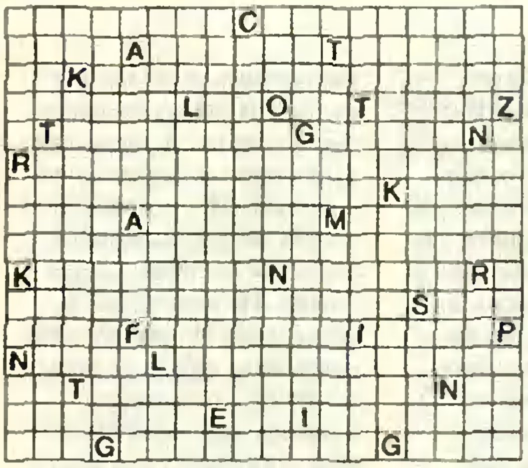


Рисунок 2

Расставьте по клеточкам 30 слов, перечисленных внизу. Все они на разных языках мира имеют одинаковое значение — загадка: ACERTIJO — испанский; AENIGMA — латинский; ARVOITUS — финский; ENIM — креольский; FUMBO — суахили; GATA — шведский; HADANKA — чешский, словацкий; KAHANI — пенджобский; KAI — маори; KIMPAMPA — конго; KIRIGA — кикуйи; MEDYSHJE — албанский; MIKLA — латышский; MOISTATUS — эстонский; MUAMMA — арабский; NANE — гавайский; NAZO — японский; ONSGO — монгольский; PIRI — язык острова Пасхи; PUZZEL — датский; RATGATA — исландский; RATSEL — немецкий; RIDDLE — английский; SASIRTMACA — турецкий; TEKATEKI — индонезийский; TOMHAS — ирландский; TRENCACAPS — каталонский; UGANKA — словенский; ULJHERA — хинди; ZAGADKA — польский. В квадрате расставлены буквы, по одной из каждого слова. Слова могут располагаться по горизонтали и вертикали.

Рисунок 4

Космический корабль попал в пояс астероидов. Чтобы расчистить себе путь, он выпустил четыре летающие тарелки, которые с помощью лазерных пушек должны уничтожить все астероиды. Каждая тарелка имеет энергии на два выстрела. Каждый выстрел уничтожает все астероиды, встретившиеся на пути луча. Найдите 8 направлений выстрелов, которые позволят уничтожить все 12 астероидов.

Сколько цифр нужно изменить, чтобы сумма четырех трехзначных чисел была равна 2001?

8	8	9
9	1	9
6	0	1
8	0	9

Рисунок 5

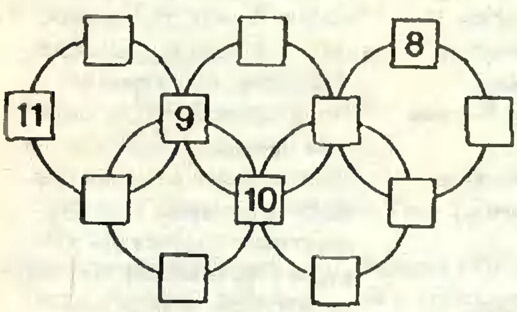


Рисунок 3

Расположите числа от 1 до 12 так, чтобы сумма чисел в каждом кольце была равна 28.

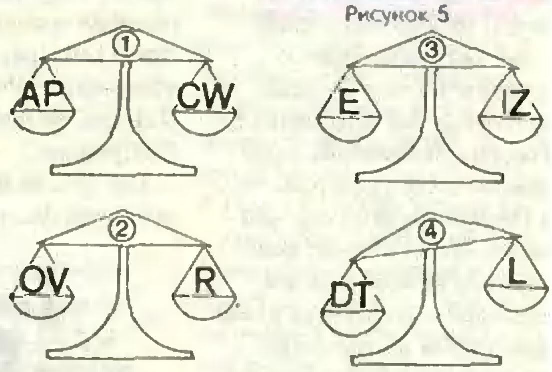


Рисунок 6

Какую из букв — B, H, Q, S или X — нужно положить на правую чашу четвертых весов, чтобы их уравновесить?

Публикацию подготовил А. Калинин

XXXIII Международная математическая олимпиада

В этот раз традиционный международный праздник юных математиков всего мира проходил в Москве (10 — 21 июля 1992 года), и Россия являлась его хозяйкой-организатором. На олимпиаду съехались 352 школьника из 67 стран. Это рекорд — на предыдущей олимпиаде в Швеции были

представлены 54 страны. Основой для эмблемы послужил значок МГУ: интеграл, продетый в ленту Мебиуса, на клетчатом фоне.

Все организационные хлопоты выпали на долю Министерства образования России, Московского государственного университета и Центра научных соревнований для молодежи; конечно, было не обойтись без спонсоров. Мы от всей души благодарим нашего генерального спонсора — фирму «Политек», а также фирмы «Наука. Технология. Бизнес», «InterCompex», «Steepler», СП «Диалог МГУ», «Подготовительные курсы МГУ», ОЭЗ «Победа», МНТО «Красная Заря», НПЦ «Физтех», АО «Интеросс», Федерацию независимых профсоюзов России, Российский благотворительный фонд «Интеллект», дирекции гостиниц «Салют» и «Измайлово» и многих других помощников, без которых было бы немыслимо провести эту олимпиаду. О том, насколько большое значение у нас в стране придавалось этой международной математической олимпиаде, можно судить из приветственных обращений к участникам и.о. председателя правительства России Е.Гайдара, министра образования России Э.Днепрова и мэра Москвы Ю.Лужкова.

Требует, видимо, объяснения тот факт, почему так увеличилось число команд именно на этой олимпиаде. Дело, конечно, в регламенте проведения международных олимпиад. И в тех политических событиях, которые переживают сейчас многие страны. По положению о проведении Международной олимпиады страна не может выставить собственную команду, если на предыдущей олимпиаде у нее не было статуса официального наблюдателя. Так и случилось в этом году с командами 11 государств (Армения, Азербайджан, Беларусь, Эстония, Казахстан, Латвия, Литва, Молдова, Словения, Туркменистан, Украина). По предложению Оргкомитета правительством России было принято решение пригласить команды этих государств для участия вне конкурса (это означает, что они не получали медали, а во всем остальном были равноправными участниками) и с регистрацией статуса официального наблюдателя. Так что на следующую олимпиаду, которая состоится летом 1993 года в Турции, они смогут выставить

Участники	Сумма баллов (из 42 возможных)	Медаль
Алексей Ногин	31	серебряная
Дмитрий Аринкин	42	золотая
Иван Изместьев	30	серебряная
Андрей Малютин	32	золотая
Владимир Некрашевич	29	серебряная
Аршак Петросян	12	—
Руслан Исмаилов	29	серебряная
Юлия Певцова	24	бронзовая
Михаил Никулин	22	бронзовая
Дмитрий Карпов	19	бронзовая
Павел Кожевников	32	золотая
Алексей Чиликов	32	золотая

ТАБЛИЦА 1

	Страна	Сумма баллов (из 252)	Медали		
			З	С	Б
1	Китай	240	6	—	—
2	США	181	3	3	—
3	Румыния	177	2	2	2
4	СНГ	176	2	3	—
5	Англия	168	2	2	2
6	Россия	158	2	1	3
7	Германия	149	—	4	2
8—9	Венгрия	142	1	2	2
8—9	Япония	142	1	3	1
10—11	Вьетнам	139	1	2	3
10—11	Франция	139	1	2	3
12	Югославия	135	—	2	4

ТАБЛИЦА 2

официальные делегации.

После принятия такого решения пришлось во время проведения летних сборов из 12 кандидатов в команду СНГ (которая была правопреемницей команды СССР) сформировать две команды: команду СНГ и команду России по 6 участников в каждой (Россия участвовала в конкурсе на правах хозяйки). В команду СНГ вошли: *Алексей Ногин* (с.ш. 57, Москва), *Дмитрий Аринкин* (с.ш. 132, Харьков), *Иван Изместьев* (с.ш. п. Суна Кировской обл.), *Андрей Малютин* (СУМЦ, Санкт-Петербург), *Владимир Некрашевич* (Ковшеватская с.ш., с. Крутые Горбы Киевской обл.), *Аршак Петросян* (ФМШ при ЕГУ). Команду России представляли: *Руслан Исмаилов* (СУМЦ, Санкт-Петербург), *Юлия Певцова* (с.ш. 239, Санкт-Петербург), *Михаил Никулин* (СУНЦ МГУ, Москва), *Дмитрий Карпов* (СУМЦ, Санкт-Петербург), *Павел Кожевников* (с.ш. 24, Калуга), *Алексей Чиликов* (с.ш. 35, Киров).

Научными руководителями и их заместителями команд СНГ и России были соответственно А.Фомин (зав. кафедрой МПГУ), Б.Кукушкин (зам. декана математического факультета МПГУ), Л.Купцов (доцент МФТИ) и И.Дынников (студент МГУ). Олимпиада как всегда проходила в два тура (в два дня), по три задачи в каждом, на решение которых отводилось 4,5 часа в каждом туре (каждая задача оценивалась в 7 баллов). Итоги выступления обеих команд приведены в таблице 1. Несмотря на то, что по своему регламенту Международная олимпиада является индивидуальным соревнованием, неофициально подводятся итоги командных выступлений, которые приведены в таблице 2 (для 12 лучших команд).

Открытие и закрытие олимпиады проходили в «русском» стиле — с обилием русских песен, плясок, вручением хлеба-соли и т.д. — и всем очень понравились. А в промежутке между открытием и закрытием были обзорная экскурсия по Москве, вечера отдыха, однодневная прогулка на теплоходе по Москве-реке, экскурсии в Сергиев Посад и в Кремль. Надеемся, что между многими участниками установились хорошие дружественные контакты, которые не исчезнут и в будущем.

Но, разумеется, главное содержание олимпиады составляет решение задач. Как возникают эти задачи, кто их предлагает? Эти вопросы интересуют многих, и поэтому здесь мы остановимся подробнее на «математической кухне» олимпиады. В течение года в Оргкомитет олимпиады от каждой страны-участницы поступает до 6 задач, которые должны быть из разных разделов математики и иметь различный уровень сложности. После отбора остаются 20 — 30 задач для обсуждения на жюри. В этом году под руководством доктора физико-математических наук А.Слинько и кандидата физико-математических наук Н.Васильева работа по отбору задач по общему признанию была выполнена очень качественно; были проанализированы авторские решения задач, придуманы новые решения, предложены альтернативные формулировки задач. Жюри Международной олимпиады, которое по положению состоит из всех научных руководителей команд (председатель — доктор физико-математических наук Ю.Нестеренко) отобрало 6 задач, которые и составили задание для участников. После написания работ и их проверки руководителем делегации и его заместителем (работы пишутся на родном языке) происходит процесс координации проверки. Специальная координационная комиссия (руководители А.Слинько и Н.Васильев) сравнивает результаты проверки и оценивает работы; при этом координация осуществляется на рабочих языках олимпиады — русском, английском, французском и испанском. Затем результаты координации сводятся в общую таблицу и вывешиваются для всеобщего обозрения. Координационная комиссия, которая насчитывала около 45 человек, сработала очень организованно и квалифицированно. Нам кажется, что опыт работы координационной комиссии может быть с успехом использован на будущих международных математических олимпиадах.

Задачи

1 (Новая Зеландия). Найдите все целые числа a, b, c такие, что $1 < a < b < c$ и число $(a-1)(b-1)(c-1)$ является делителем числа $abc-1$.

2 (Индия). Пусть R — множество всех действительных чисел. Найдите все функции $f: R \to R$ такие, что $f(x^2+f(y)) = y + (f(x))^2$ для всех x, y из R.

3 (Китай). В пространстве даны 9 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Все эти точки попарно соединены отрезками. Отрезок может быть выкрашен в синий или красный цвет, или остаться незакрашенным. Найдите наименьшее значение n такое, что при любом закрашивании любых n отрезков найдется треугольник, все стороны которого будут одного цвета.

4 (Франция). На плоскости даны окружность C, прямая L, касающаяся C, и точка M на L. Найдите множество всех точек P, удовлетворяющих следующему условию: существуют две точки Q, R, лежащие на L, такие, что M — середина QR, и окружность C вписана в треугольник PQR.

5 (Италия). Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, S — конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z — множества ортогональных проекций всех точек S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что

$|S|^2 \le |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$. (Через $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества A. Ортогональная проекция точки на плоскость есть основание перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость.)

6 (Великобритания). Для любого положительного целого числа n через $S(n)$ обозначим наибольшее целое число такое, что при любом целом k, $1 \le k \le S(n)$, число n^2 может быть представлено в виде суммы k квадратов целых положительных чисел.

а) Докажите что $S(n) \le n^2 - 14$ при любом $n \ge 4$.

б) Найдите целое число n такое, что $S(n) = n^2 - 14$.

в) Докажите, что существует бесконечно много целых чисел n таких, что $S(n) = n^2 - 14$.

Валерий Вавилов, Борис Кукушкин, Александр Фомин

II Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

С 1 по 8 ноября 1992 года в Зеленоградске на берегу Балтийского моря прошла вторая международная тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон — 92».

Организаторы олимпиады — московский интеллект-клуб «Глюон» при участии и поддержке администрации калининградской области и школы-лицея №23 Калининграда. 90 школьников, лицеистов и гимназистов из Беларуси, Венгрии, Казахстана, Украины и различных областей и городов России (всего 29 делегаций) состязались в трех видах программы — по английскому языку, физике и математике.

Цель первого тура — определить уровень владения английским языком как средством общения.

Второй — физический и третий — математический туры проводились, как и в 1991 году (см. «Квант» № 7 за 1992г), за исключением незначительных изменений. Так, на письменном этапе как по математике, так и по физике предлагалось не 12, а 8 задач (они приведены ниже; в скобках указано количество баллов). На устном этапе физического тура предлагались задачи трех типов, при решении которых нужно было проявить хорошие знания теории, сообразительность и понимание физической сущности явлений; решение задач ограничивалось во времени (от 9 до 10 минут).

Во всех турах максимально возможное количество баллов было равно ста.

В каждом туре определялись победители в личном и командном зачете и по итогам всех туров — абсолютный победитель. В личном зачете им стал *Виктор Перлин*, ученик 11 класса лицея Физико-техническая школа при ФТИ им. А.Иоффе (Санкт-Петербург). Второе место занял *Владимир Замятин* из вятского Физико-математического лицея; третьим стал *Леонид Коф* из барнаульской школы-гимназии №42.

В командном зачете 1-е место, как и в прошлом году, занял лицей ФТШ при ФТИ им. А.Иоффе (Санкт-Петербург); на 2-м месте — Физико-математический лицей из Вятки; на 3-м — СУНЦ МГУ (Москва).

Победители и призеры в личном и командном зачете были награждены денежными премиями, ценными призами и памятными подарками. Были присуждены специальные призы: самому юному участнику — им стал *Сергей Грищенко* (12 лет) из Барнаула, — и ставший традиционным почетный приз «Мисс Олимпиада - 92» — *Екатерине Малиновой* из Санкт-Петербурга (Академическая гимназия при СПГУ) за лучший результат среди девушек-участниц.

Приз зрительских симпатий «Уральский самоцвет» увезла с собой команда Венгрии.

Победители и призеры в личном зачете были удостоены годовой стипендии Фонда «Филантропия» при Международной ассоциации Фондов Мира, возглавляемой Анатолием Карповым.

Но не марафоном единым (пусть и интеллектуальным!) жив человек. В свободное от задач время ребята познакомились с культурой древнего Калининграда (когда-то Кролевец, затем Кенигсберг), побывали в музее янтаря, картинной галерее, съездили в национальный парк на Куршской косе; много нового и забавного узнали о себе и своих друзьях-соперниках на вечере знакомств и презентаций. Очередная, третья олимпиада состоится в октябре 1993 года. Клуб «Глюон» приглашает центры по работе с одаренными детьми, школы с углубленным изучением физики, математики и английского языка принять в ней участие.

Заявки об участии в олимпиаде просим высылать по адресу:

115580, Москва, а/я №10, клуб «Глюон».

Задачи

Математика

1. Какое из чисел больше: $1993^{1991}\cdot 1991^{1993}$ или 1992^{3984}? (7)

2. Докажите, что
$$\frac{13}{12}<\frac{1}{1993}+\frac{1}{1994}+\ldots+\frac{1}{7968}<\frac{11}{6}.$$
(14)

3. Решите уравнение $(x^2-x-1)^3+(2x^2-x-7)^3=(3x^2-2x-8)^3$. (7)

4. В треугольнике ABC проведены медианы BM и CN, пересекающиеся в точке O. Найдите AC, если известно, что в четырехугольник $AMON$ можно вписать окружность, и $BC=2$, $NC=\sqrt{3}$. (14)

5. а) Докажите, что сумма квадратов любых 10 последовательных натуральных чисел не является полным квадратом. (8)

б) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых является полным квадратом. (9)

6. Пусть α — корень уравнения $x^2 + px + q = 0$, а β — корень уравнения $x^2 - px - q = 0$. Докажите, что между числами α и β найдется корень уравнения $x^2 - 2px - 2q = 0$. (16)

7. В треугольнике ABC через середину K биссектрисы BD проведена прямая, перпендикулярная BD и пересекающая прямую AC в точке E. Докажите, что

$DE^2 = AE \cdot EC$. (9)

8. В каждой клетке таблицы $m \times n$ стоит единица. Разрешается взять произвольный квадратик 2x2 и поменять в нем знаки у всех чисел. При каких m и n можно с помощью таких операций получить «шахматную» расстановку знаков в таблице? (16)

Физика

1. Через неподвижный блок перекинута веревка, на одном конце которой закреплен груз массой M (рис. 1). Муфта массой m скользит с постоянным ускорением a_0 относительно веревки. Найдите силу трения муфты относительно веревки. Массой блока, веревки и трением в блоке можно пренебречь. (10)

2. К маятнику AB с шариком массой M подвешен маятник

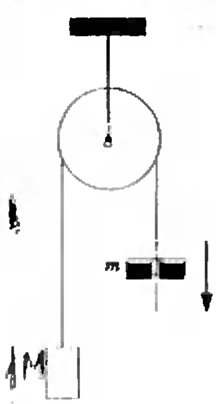


Рисунок 1

BC с шариком массой m (рис. 2). Точка A совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом T. Найдите длину нити BC, если известно, что нить AB все время остается в вертикальном положении. (16)

3. Две горизонтальные полуплоскости, расположенные

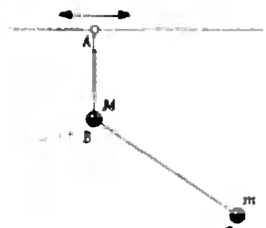


Рисунок 2

на высоте h одна над другой, плавно переходят друг в друга, как показано на рис.3. По верхней полуплоскости под углом α к направлению на спуск движется со скоростью v небольшой брусок. Как он будет двигаться по нижней полуплоскости? Брусок не подпрыгивает, трения нет. (14)

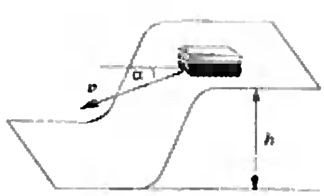


Рисунок 3

4. Планету радиусом r и массой M окружает равноплотная атмосфера, состоящая из газа с молярной массой М. Какова температура атмосферы на поверхности планеты, если высота атмосферы h? (10)

5. Внутри большого сосуда с гелием при давлении p = 1атм и температуре T_0 = 300 К находится маленький теплоизолированный откачанный сосуд. На короткое время в стенке маленького сосуда открывают небольшое отверстие, при этом некоторое количество гелия успевает войти в этот сосуд. Какая температура установится в нем? (14)

6. В стакан, содержащий m = 200 г воды, опускают нагреватель мощностью P = 50 Вт. Максимальная температура воды после длительного нагревания составляет в этом случае t_1 = 55°C. За какое время вода остынет на Δt = 1°C после выключения нагревателя? Оцените максимальную температуру воды в стакане при увеличении напряжения в сети на 20%. Температура воздуха t = 20°C. (14)

7. Плоский конденсатор имеет емкость C. На одну из пластин конденсатора поместили заряд $+q$, а на другую — заряд $+4q$. Определите разность потенциалов между пластинами конденсатора. (10)

8. Электрический прибор подключен к сети напряжением U_0 = 220 В последовательно с резистором сопро-

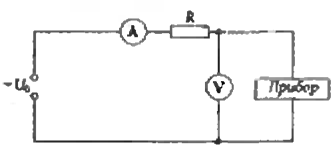


Рисунок 4

тивлением R = 100 Ом (рис. 4). При этом амперметр показывает ток I = 0,5 А, вольтметр — напряжение U = 200 В. Какую среднюю мощность потребляет прибор? (12)

Публикацию подготовили В. Альминдеров и А. Егоров

КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи («Квант» №1/2)

1. Все ребята получили по одинаковому куску торта. **2.** $(264)^2 = 69696$.

3. Указанная в задаче ситуация возможна лишь для правильного тетраэдра, у которого 6 ребер. Грань, на которую упал тетраэдр, имеет номер 2. Итак, $6 + 2 = 2^3$.

4. Пусть длины ребер кирпича — a, b и c, плотность — ρ, а давления в трех положениях — p_1, p_2, и p_3. Тогда

$$p_1 = \frac{\rho gabc}{ab},$$

откуда $c = \dfrac{p_1}{\rho g}$,

аналогично $b = \dfrac{p_2}{\rho g}$ и $a = \dfrac{p_3}{\rho g}$.

Следовательно, масса кирпича равна

$$m = \rho V = \rho abc = \frac{p_1p_2p_3}{\rho^2 g^3}.$$

Поскольку давление стенки высотой h равно $p = \rho gh$, то

$$\rho = \frac{p}{gh}.$$

Подставляя это значение ρ в формулу для массы кирпича, получим

$$m = \frac{p_1p_2p_3h^2}{p^2g} = \frac{1368\cdot 2581\cdot 5404\cdot 16}{(88200)^2\cdot 9{,}8} \approx 4 \text{ кг}.$$

5. Проведем в круге еще 4 отрезка: AD, EF — равный и параллельный AB, FC — равный DE, и PQ — равный и параллельный EF. Круг разбился на 5 пар равных частей, причем в каждой паре одна часть синяя, а другая желтая (рис. 1).

Ложка дегтю в бочку меда

1. Тень. 2. Тень. 3. Свет. 4. Тепло. 5. Гром. 6. Гром. 7. Роса.

Конкурс «Математика 6—8»

(«Квант» №10,11 1992)

4. Сначала заметим, что бегемот — травоядное животное и поэтому рыбу не ест. Из остальных меньше всех съел гавиал (разновидность крокодила), а поскольку трое съели 37 рыб, то он съел не больше 12-ти. Если обозначить число съеденных им рыб через x, а число рыб, съеденных пеликаном, через y, то кашалот съел y^2/x рыб. Из условия
$x + y + y^2/x = 37$,
или $x^2 + xy + y^2 - 37x = 0$, находим, что

$$y = \frac{x}{2}\left(\sqrt{\frac{148-3x}{x}} - 1\right).$$

Для того чтобы выражение под радикалом было квадратом рационального числа, необходимо, чтобы либо число $148 = 37\cdot 4$ делилось на x, либо x был бы квадратом целого числа. А так как $x \le 12$, то следует проверить лишь $x = 1, 2, 4, 9$. Только при $x = 9$ под корнем будет квадрат рационального числа $121/9 = (11/3)^2$, отсюда $y = 12$, $y^2/x = 16$. Итак, бегемот не ел рыбы, поскольку он — вегетарианец, гавиал съел 9, пеликан 12 и кашалот 16 рыб.

5. Соединим точку M со всеми вершинами и серединами сторон треугольника ABC (рис. 2). Если хотя бы один из отрезков AM, BM, CM будет не менее чем вдвое больше хотя бы одного из отрезков MP, MR, MQ, то и максимальный из отрезков, соединяющих точку M с вершинами, будет не менее чем вдвое больше минимального отрезка, соединяющего эту точку с серединами сторон. Выберем из углов AMB, BMC, CMA тот, который не меньше $120°$. Пусть это будет угол AMC, тогда сумма углов MAP и MCP не больше $60°$. Приставим теперь треугольник MCP к треугольнику AMP так, что-

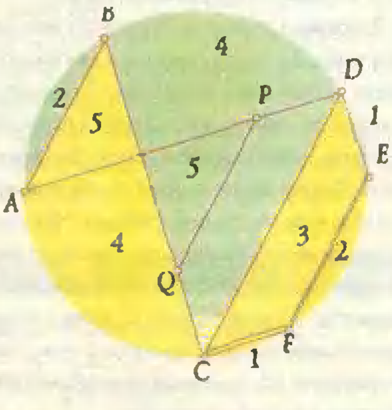


Рисунок 1

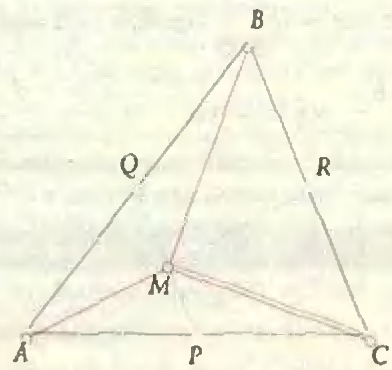


Рисунок 2

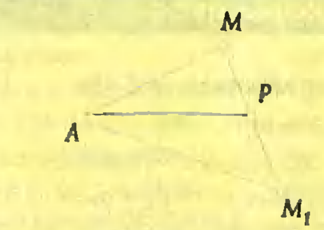


Рисунок 3

бы сторона PC совпала со стороной PA (рис. 3). Вершина M попадет в точку M_1. Получится треугольник M_1AM. Так как угол M_1AM равен сумме углов MAP и MCP, то он не больше $60°$. Следовательно, один из углов AM_1M и AMM_1 не меньше $60°$. Пусть это угол AM_1M. Как известно, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, поэтому $AM >$ $> MM_1 = 2MP$. Утверждение доказано.

6. Рассмотрим команду, одержавшую наибольшее число побед, число которых обозначим через m. Тогда m команд, побежденных ею, провели между собой $m(m-1)/2$ матчей и поэтому имеют вместе не менее $m(m-1)/2$ очков. Отсюда $m(m-1)/2 \le m$ и $m \le 3$. Для каждого из случаев $m = 1,2,3$ находится единственный вариант турнирной таблицы (рис. 4, *а*,*б*,*в*), поэтому в турнире учас-

	A	B	C
A		1	0
B	0		1
C	1	0	

а

	A	B	C	D
A		1	0	1
B	0		1	1
C	1	0		1
D	0	0	0	

б

	A	B	C	D
A		1	1	1
B	0		1	0
C	0	0		1
D	0	1	0	

в

Рисунок 4

твовали 3 или 4 команды.

7. Условие увеличения или уменьшения числа показанных серий на 40% соответствует умножению числа показанных серий на $7/5$ или на $3/5$. Пусть n — число показанных в 1988 году, тогда в 1989 было показано $n\frac{a}{5}$ серий, в 1990 году — $n\frac{a}{5}\cdot\frac{b}{5}$ серий, в 1991 году — $n\frac{a\cdot b\cdot c}{5\cdot 5\cdot 5}$ и в 1992 году — $n\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}$, где числа a, b, c и d принимают значения 3 и 5. Так как число серий, показанных в 1992 году, — целое, то n делится на $5^4 = 625$. С другой стороны, известно, что в год показывалось не более $366\cdot 2 = 732$ серий, поэтому $n = 625$. В 1989 году количество показанных серий равно $625\cdot\frac{3}{5} = 375$, т.к. если бы их было больше, то их было бы $625\cdot\frac{7}{5} = 875$, что больше 732.

Итак, за два года было показано $625+375=$ $=1000$ серий. Если бы в 1990 году количество показанных серий еще уменьшилось, т.е. было бы показано $375\cdot\frac{3}{5} = 225$ серий, то за три года было бы показано 1225 серий и в 1990 году не могла быть показана 1230-я серия. Поэтому в 1990 году было показано

$375\cdot\frac{7}{5} = 525$ серий. 1230-я серия была показана не раньше, чем на $230 : 2 = 115$-й день 1990 года. В 1991 году количество серий не могло увеличиваться, так как в этом случае было бы показано $525\cdot\frac{7}{5} = 735$ серий, что больше максимально возможного числа 732.

Значит, в 1991 году было показано $525\cdot\frac{3}{5} = 315$ серий. В 1992 году могло быть показано либо $315\cdot\frac{3}{5} = 189$ серий, либо $315\cdot\frac{7}{5} = 441$ серия. Но на 441 серию понадобится не меньше 221 дня, а последняя серия была показана не позже, чем за 148 дней до конца. Поскольку $221 + 148 = 369 > 366$, то такого быть не может. Следовательно, в 1992 году было показано 189 серий, а всего в сериале $625 + 375 + 525 + 315 + 189 = 2029$ серий.

8. Числом, удовлетворяющим условию, является, например, $99^3 = 970299$. Действительно, сумма цифр не меняется при указанных перестановках, поэтому все полученные числа делятся на 9; кроме того, все они будут делиться и на 11. Действительно, пусть число $abcdef$ делилось на 11. Рассмотрим число $bcdefa$.

Сумма $abcdef + bcdefa = 11bcdef + 100001a$, но число $100001 = 11\cdot 9091$, поэтому сумма делится на 11. Если же сумма двух чисел делится на p и одно из слагаемых делится на p, то и второе тоже делится на p.

9. Разрежем кубик по красным линиям. Если при этом он распадается на две или большее число частей, то это значит, что на его поверхности есть замкнутые линии, состоящие из красных отрезков. Если кубик не распался на части (всего один кусок), то будем отрезать квадратики по синим линиям. Чтобы разрезать весь кусок из 24 квадратиков на отдельные квадратики, необходимо сделать не меньше 23 разрезов, но у нас всего 22 синих отрезка. Следовательно, предположение о том, что после разрезания по красным отрезкам кубик не распадется на части, неверно.

КАЛЕЙДОСКОП КВАНТА

1. Нет, поскольку в данном случае электрическое и магнитное поля постоянны и не связаны между собой.

2. Автомобильный приемник обычно принимает прямой сигнал передающей станции, в котором электрическое поле поляризовано вертикально. Чтобы мощность принимаемого сигнала была максимальной, приемная антенна тоже должна быть вертикальной.

3. Короткие волны распространяются на большие расстояния благодаря многократным отражениям от поверхности Земли и от проводящих слоев атмосферы (ионосферы). Что и приводит к возникновению на Земле зон молчания.

4. В отсутствие прямого солнечного излучения ионизация молекул в ионосфере уменьшается. Это увеличивает ее отражающую способность и способствует распространению электромагнитных волн на значительные расстояния.

5. Морская вода сильно поглощает электромагнитные волны.

6. Для определения расстояний до Луны и планет.

7. Ультракороткие волны, на которых осуществляются телепередачи, распространяются практически по прямой, потому что ионосфера для этих волн прозрачна, а наземные препятствия они почти не огибают.

8. Вследствие обмена энергией в результате теплового излучения.

9. Да, испускает.

10. Стекло поглощает как инфракрасные, так и ультрафиолетовые лучи.

11. Ультрафиолетовое излучение от естественной зелени и предметов маскировки различно, поэтому различно их действие на фотопленку.

12. Энергия рентгеновских квантов не может превышать энергию, выделяющуюся при торможении электронов.

13. Можно, так как длина волны гамма-лучей еще меньше.

Микроопыт. Отражать инфракрасные лучи, испускаемые спиралью.

ШКОЛА В КВАНТЕ

Необыкновенные арифметики

1. а) 7; б) 6; в) 3. **3.** 1; 9.

5. Уравнение $x^2 = 1$ имеет в указанных арифметиках следующие решения:
в Z_7 — $\{1; 6\}$; в Z_8 — $\{1; 3; 5; 7\}$; в Z_9 — $\{1; 8\}$; в Z_{11} — $\{1; 10\}$; в Z_{12} — $\{1; 5; 7; 11\}$; в Z_{13} — $\{1; 12\}$.
Уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в Z_7, Z_8, Z_9, Z_{11}, Z_{12}; в Z_{13} его корни $\{8; 5\}$.

6. 59 делителей нуля.

7. *Указание.* Заметьте, что $1992 = -1$ в арифметике остатков по модулю 1993; аналогично, $1991 = -2$ и т.д.

9. *Указание.* Вычислите значение этого выражения в Z_p.

11. *Указание.* Поскольку p просто, $(p-1)! = -1$. С другой стороны, остатки по модулю p естественно разбиваются на пары вида a и $(-a)$ (так, $p-1=-1$, $p-2=-2$ и т.д.), поэтому
$(p-1)! = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\ldots 2k\cdot(-2k) = ((2k)!)^2 = -1$, т.е. уравнение $x^2+1=0$ имеет 2 корня: $(2k)!$ и $-(2k)!$.

12. Эта задача (М1357) была опубликована в «Задачнике «Кванта», ее решение приведено в №1/2 нашего журнала за 1993 год.

15. 3; 10; 12.

16. *Указание.* а) Если $a \ne 0$, то $a^4 = 1$ в Z_5. б,в) Найдите порядки остатков 3 и 2 в Z_7.

17. *Указание.* Рассмотрите остаток данного числа по модулю 19.

19. 6.

20. *Указание.* а) Число 263 — простое, поэтому $2^{262} - 1 = (2^{131}-1)(2^{131}+1)$ делится на 263. б) Положим $2^{3^{n-1}} = a$, тогда $2^{3^n} + 1 = a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$; первый из сомножителей делится на 3^n, второй — на 3, но не на 9.

21. *Решение.* Допустим, что $p = 4k+3$ и $x^2 = -1$ в Z_p.
Тогда $x^{4k+2} = 1$. Но $x^2 = -1$ в Z_p, откуда $(x^2)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}$, $x^{4k+2} = -1$. Противоречие.

22. *Решение.* Допустим, что таких простых чисел конечное число: $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Рассмотрим число $4(p_1p_2\ldots p_m)^2 + 1$. Тогда оно либо простое (и именно такого вида, как нужно), либо делится на некоторое простое число, отличное от $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Но такое простое число имеет вид $4k+1$, как было доказано в предыдущей задаче.

23. *Указание.* m — наименьший показатель степени такой, что 10^{m-1} делится на q.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Экстремумы в задачах по физике

1. $s_{max} = \dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

2. $\alpha = \arccos\left(\sqrt{3}/3\right) = 55°$.

3. $m_1 = m_2$. **4.** $R = r$; $P_{max} = \mathcal{E}^2/(4r)$.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $\pi(6n+1)/6$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Выполнив замену $u = x - \dfrac{\pi}{6}$, приведите уравнение к виду $|\cos u| = 1 + 7\sin u$,
а затем возведите в квадрат и решите полученное уравнение относительно $\sin u$. При отборе корней последнего уравнения воспользуйтесь условием $1 + 7\sin u \ge 0$.

2. На продолжении. *Указание.* Точка *A* не может лежать ни на отрезке *PD*, ни на отрезке *DR*. В самом деле, если бы точка *A* лежала на отрезке *PD*, то $\angle SAD$ как внешний угол в треугольнике *PAS* был бы меньше внутреннего угла *SPA*. Аналогично, точка *A* не может находиться на отрезке *DR*.

3. $\dfrac{p+q+pq}{6(p+q-2pq)}$,

если $p \ne 0$, $1/6$ при $p = 0$. *Указание.* Если $p \ne 0$ и $q \ne 0$, перейдите к основанию *y*, при $p = q = 0$, т.е. при $y = 1$, $\log_{(xz)^3}\sqrt{xz} = 1/6$.

4. 36. *Решение.* Пусть на новом станке рабочий производит *n* деталей в час и выполняет дневную норму за *m* часов. Тогда
$mn = 2(m-1)(n-1)$, откуда
$$m = 2 + \frac{6}{n-6}.$$
Поэтому (так как $n > 8$) либо $n = 9$, либо $n = 12$. Но тогда $m = 4$, либо $m = 3$. В обоих случаях $mn = 36$.

5. 8. *Решение.* Спроектируем обе прямые на плоскость, перпендикулярную прямой *q*. Пусть проекцией прямой *q* будет точка *M* (рис. 5), проекцией прямой *p* — прямая p', проекциями точек *A*, *B*, *C* — точки A', B', C' соответственно. Тогда $A'M = 17$, $B'M = 10$, $C'M = 8$, $B'C' / A'B' = BC / AB = 2/3$, и нужно найти расстояние от точки *M* до прямой p'. Положим $B'C' = 2x$, $A'B' = 3x$, и по теореме косинусов из треугольников $A'C'M$ и $B'C'M$ с общим углом $C' = \gamma$ получим:
$$\cos\gamma = \frac{8^2 + (5x)^2 - 17^2}{2\cdot 8\cdot 5x} = \frac{8^2 + (2x)^2 - 10^2}{2\cdot 8\cdot 2x},$$
откуда $x = 3$, $\cos\gamma = 0$, т.е. $C'M \perp A'C'$, а искомое расстояние равно $C'M$.

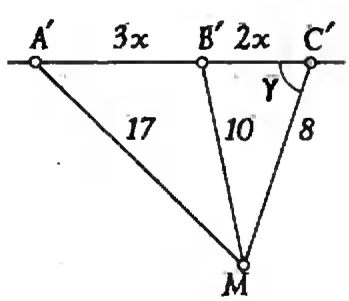


Рисунок 5

6. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. *Указание.* Перепишем данное неравенство так:
$$f(a) = a^2 + a(x^3 + 2x^2 - 4) - (2x^3 + x^2 - 6x + 5) > 0.$$
Левая часть его — квадратный трехчлен относительно *a* с коэффициентами, зависящими от *x*. Для того, чтобы квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при a^2 принимал положительные значения хотя бы в одной точке отрезка $[-1;2]$, необходимо и достаточно, чтобы он был положителен хотя бы в одном из концов этого отрезка. Получаем совокупность неравенств для *x*:
$$\left[\begin{array}{l} f(-1) > 0, \\ f(2) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)(x-1)x < 0, \\ (x+3)(x-1) > 0. \end{array}\right.$$

Вариант 2

1. Второе число больше.

2. $\pi(4k+1)/2$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение приводится к виду $|\cos 2x|\sin x = 1$, откуда следует, что $\sin x = 1$, $|\cos 2x| = 1$.

3. $[2;11)$. **4.** 11 часов.

5. $\left(5 + \sqrt{15}\right)/4$. *Указание.* Треугольники *ABK* и *CAK* (рис. 6) подобны, поскольку $\angle BAK = \angle KCA$ (первый из этих углов — угол между касательной *AB* и хордой *AK* окружности *AKC*, а второй — вписанный, опирающийся на дугу *AK* той же окружности). Аналогично, $\angle ABK = \angle KAC$. Поэтому
$$\frac{BK}{AK} = \frac{AK}{CK} = \frac{AB}{AC},$$
откуда следует, что
$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AK}{CK}\cdot\frac{BK}{AK} = \frac{BK}{CK} = \frac{1}{4},$$
т.е. $AC = 2AB$.
Пусть $\angle BAC = \gamma$, $AB = x$. Тогда

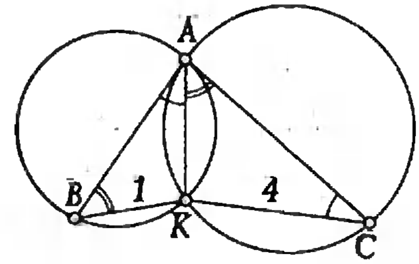


Рисунок 6

$\angle AKB = \angle AKC = \pi - \gamma$, а $\angle BKC = 2\gamma$. Применяя теорему косинусов к треугольнику BKC, находим, что $BC = 10$, а из треугольника ABC также с помощью теоремы косинусов находим x.

6. $a > 2\pi - \frac{1}{8}$. *Указание.* Пусть $y = x^2 - ax$. Исходное неравенство принимает вид

$$\frac{4}{3}y - \frac{\pi}{3} < \sin y + \cos(2y + \frac{\pi}{4}),\text{ или}$$

$$\frac{4}{3}y - \frac{\pi}{3} < \sin y - \sin(2y - \frac{\pi}{4}).$$

Далее получаем

$$\frac{4}{3}(2y - y) - \frac{\pi}{3} + \sin(2y - \frac{\pi}{4}) < \sin y$$

и, наконец,

$$\frac{4}{3}(2y - \frac{\pi}{4}) + \sin(2y - \frac{\pi}{4}) < \frac{4}{3}y + \sin y,$$

откуда, положив $t = 2y - \frac{\pi}{4}$, получаем неравенство

$$\varphi(t) < \varphi(y), \qquad (*)$$

где $\varphi(t) = \frac{4}{3}t + \sin t$. Функция $\varphi(t)$ возрастает на всей числовой прямой, и поэтому неравенство $(*)$ равносильно неравенству $t < y$, т.е. неравенству $y < \frac{\pi}{4}$. Итак, для всех x из промежутка $[\pi; 2\pi]$ должно выполняться неравенство $x^2 - ax - \frac{\pi}{4} < 0$, последнее же условие эквивалентно системе из двух неравенств

$$\begin{cases} \pi^2 - a\pi - \frac{\pi}{4} < 0, \\ (2\pi)^2 - 2a\pi - \frac{\pi}{4} < 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. $\{(-1-\sqrt{3})/2; (-1+\sqrt{3})/2\}$.

2. $\pi/2 + 2\pi k,\ \ (-1)^k \arcsin 1/3 + \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

3. $2^{2/11}$.

4. $\frac{1}{b\sin\alpha}\sqrt{4S^2 - 2b^2 S\sin 2\alpha + b^4\sin^4\alpha}$.

5. $a_1 = 2,\ \ d = 3$.

6 $\sqrt{pq}$. *Указание.* Пусть $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $AC = b$, $\angle B = \beta$. Тогда $\angle CPK = \alpha$, $\angle CQL = \beta$ (это углы, стороны которых перпендикулярны сторонам соответствующих углов треугольника ABC), и $2p\sin\alpha = b$, $2q\sin\beta = a$. Поэтому $pq = ab/(4\sin\alpha\sin\beta) = R^2$. Итак, $R = \sqrt{pq}$.

7. $f(x) = \begin{cases} \log_3(x/3) & \text{при } x > 0, \\ -\log_3(-x/3) & \text{при } x < 0; \end{cases}$

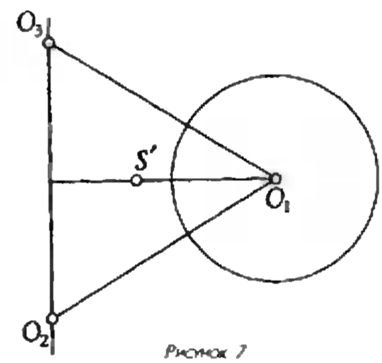


Рисунок 7

корни уравнения: 81, $-1/9$.

8. $R\left|2\sqrt{3}\cos\varphi - 3\right| / (3\sin\varphi)$.

Решение. Пусть S — вершина конуса, S' — ее проекция на плоскость α, O_1, O_2, O_3 — центры шаров (рис. 7). Так как треугольник $O_1O_2O_3$ правильный, то

$$S'O_1 = \frac{2}{3}2R\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Предположим сначала, что вершина конуса S расположена над плоскостью α и N — точка касания конуса и шара с центром O_1. Соединим точки O_1 и N, а на продолжение отрезка O_1N опустим перпендикуляр $S'L$ (рис. 8,*а*). Проведем $KL \parallel SS'$. По построению

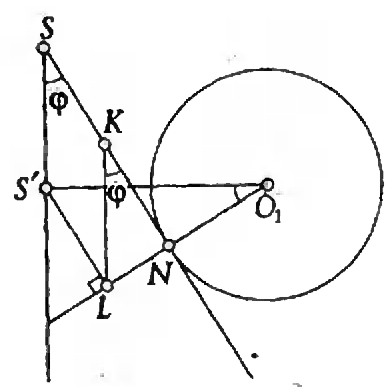


Рисунок 8, а

$SKLS'$ — параллелограмм, так что искомое расстояние d равно KL. Поскольку $\angle S'O_1L = \angle S'SN = \varphi$ (углы с перпендикуляр-

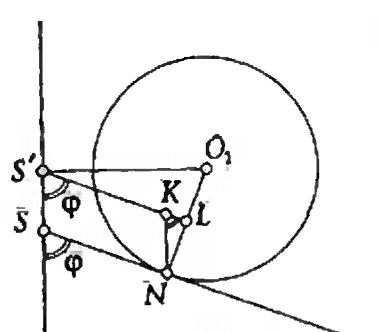


Рисунок 8, б

ными сторонами), то

$LO_1 = S'O_1\cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R\cos\varphi$. Наконец,

$KL = \dfrac{LN}{\sin\varphi} = \dfrac{LO_1 - R}{\sin\varphi} = \dfrac{R}{\sin\varphi}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi - 1\right)$.

Если точка O расположена под плоскостью α (рис. 8, б), то $NL = R - LO_1$ и $d = R(3 - 2\sqrt{3}\cos\varphi)/(3\sin\varphi)$.

Вариант 4

1. -1.

2. $\left[2\pi k; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right), \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m; \pi(2m+1)\right]$, $k, m \in \mathbf{Z}$.

Указание. Неравенство равносильно системе $0 \le \sin x < 1/2$. **3.** $10 \pm 4\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть O — центр искомой окружности, S — точка ее касания с прямой CD. Проведем $ON \parallel AD$, OP и $DT \perp AD$ (рис. 9). Так как $DQ = 2$, то $AP = PQ = 3$.

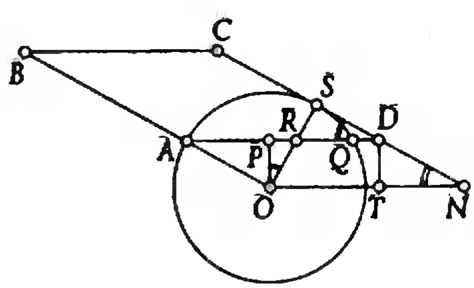


Рисунок 9

Тогда $OP = \sqrt{x^2 - 9}$; с другой стороны,

$OP = TD = TN\,\mathrm{tg}\,30° = (ON - OT)\,\mathrm{tg}\,30° =$

$$= (2OS - PD)\,\mathrm{tg}\,30° = (2x - 5)\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Получаем уравнение

$$\sqrt{x^2 - 9} = (2x - 5)\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. $[15; 40]$ (в процентах). *Решение.* Пусть в единице массы нового сплава содержится x, y, z единиц массы первого, второго и третьего сплавов соответственно. Требуется найти интервал, в котором может принимать значения величина $\alpha = 0,45x + 6y$ при условиях

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0,15y + 0,3z = 0,2, \\ x, y, z \ge 0. \end{cases}$$

Выразив α через x, получим $\alpha = 0,4 - 0,75x$, где $0 \le x \le 1/3$. Следовательно, $0,15 \le \alpha \le 0,4$.

5. а) $(-23; 0)$; б) $(-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$. *Решение.* Уравнение равносильно совокупности четырех систем

$$\begin{cases} x - k^2 \ge 0, \\ x + 4k \ge 0, \\ x = -\dfrac{k(k-1)}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - k^2 \ge 0, \\ x + 4k < 0, \\ x = \dfrac{k(k-23)}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - k^2 < 0, \\ x + 4k \ge 0, \\ x = \dfrac{k(k-1)}{6}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - k^2 < 0, \\ x + 4k < 0, \\ k(k+23) = 0. \end{cases}$$

Первая из них имеет решение

$$\begin{cases} k = 0, \\ x = 0; \end{cases}$$

вторая решений не имеет, третья равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} k > 0, \\ x = \dfrac{k(k-1)}{6}, \end{cases} \qquad \begin{cases} k \le -23, \\ x = \dfrac{k(k-1)}{6}; \end{cases}$$

четвертая равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} k = 0, \\ x < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} k = -23, \\ x < 92. \end{cases}$$

В итоге $x = \dfrac{k(k-1)}{6}$ при $k < -23$, $x \le 92$ при $k = -23$, нет решений при $-23 < k < 0$, $x \le 0$ при $k = 0$, $x = \dfrac{k(k-1)}{6}$ при $k > 0$.

Вариант 5

1. $-\dfrac{\pi}{36} \pm \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$. **2.** 13.

3. 216. *Указание.* Пусть O — центр окружности, K — точка касания окружности с прямой PQ, а $\angle MPO = \alpha$ и $MP = x$ (рис. 10). Тогда $QP = x/\cos 2\alpha$, $MQ = x\,\mathrm{tg}\,2\alpha$, причем

$$\begin{cases} x\left(1 + \dfrac{1}{\cos 2\alpha} + \mathrm{tg}\,2\alpha\right) = 72, \\ \dfrac{8}{x} = \mathrm{tg}\,\alpha, \\ x > 15. \end{cases}$$

4. $(12; -8)$. *Указание.* Выделяя полные квадраты, приводим систему к виду

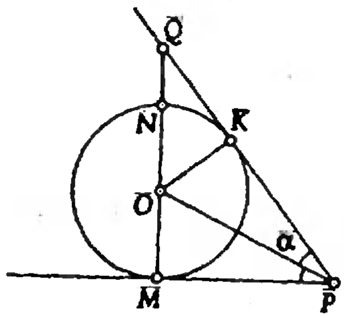


Рисунок 10

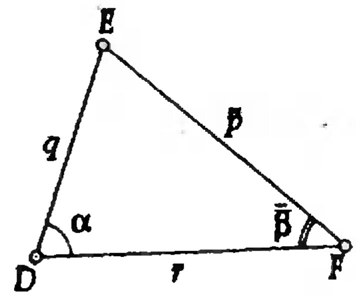


Рисунок 11

$$\begin{cases}(p-9)^2+(q+10)^2<15,\\(p-16)^2+(q+6)^2<21,\end{cases}$$

поэтому $\begin{cases}|p-9|<\sqrt{15},\\|p-16|<\sqrt{21},\end{cases}$

откуда следует, что $p = 12$. Дальнейшее ясно.

5. 5. *Решение.* Из условия следует, что $0<u<1,\ 0<v<1$. Положив $u=\sin\alpha$, $v=\cos\beta$, где α и β — острые углы, перепишем систему неравенств так:

$$\begin{cases}p\cos\beta+q\cos\alpha\le r,\\p^2\ge q^2+r^2-2qr\cos\alpha,\\q^2\sin^2\alpha\ge(q^2+r^2-2qr\cos\alpha)\sin^2\beta.\end{cases}$$

Докажем, что числа p, q, r являются сторонами треугольника, а α и β — его острыми углами, противолежащими сторонам p и q соответственно, причем все неравенства на самом деле являются равенствами.

Построим треугольник со сторонами q и r и углом α между ними. Пусть $\overline{p}$ — третья сторона этого треугольника (рис. 11).

Тогда

$\overline{p}\cos\overline{\beta}+q\cos\alpha=r\ge p\cos\beta+q\cos\alpha$,

откуда следует, что

$$\overline{p}\cos\overline{\beta}\ge p\cos\beta. \qquad (*)$$

Поэтому $\cos\overline{\beta}>0$, т.е. $\overline{\beta}<\frac{\pi}{2}$.

Из второго неравенства получаем (теорема косинусов), что $p^2\ge(\overline{p})^2$, т.е.

$$p\ge\overline{p}. \qquad (**)$$

По теореме синусов $q\sin\alpha=\overline{p}\sin\overline{\beta}$. Поэтому

$(\overline{p})^2\sin^2\overline{\beta}\ge(\overline{p})^2\sin^2\beta$,

т.е. $\sin\overline{\beta}\ge\sin\beta$, а так как $\overline{\beta}$ — острый угол, то $\overline{\beta}\ge\beta$. Но тогда $\cos\beta\ge\cos\overline{\beta}$ и, в силу $(*)$, $\overline{p}\ge p$. Сопоставляя это неравенство с $(**)$, получаем $\overline{p}=p$. Но тогда $\beta=\overline{\beta}$ и все неравенства системы являются равенствами.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника PQR. Данная в условии величина $f=\frac{1}{r}\left(\frac{4p}{\sin\alpha}+\frac{q}{\sin\beta}\right)=\frac{10R}{r}$, поскольку $p=2R\sin\alpha,\ \ q=2R\sin\beta$.

Но для всякого треугольника $r\le 2R$. Поэтому $f\le 5$, причем наибольшее значение f достигается при $r=2R$, т.е. когда угол PRQ — прямой.

Вариант 6

1. $\pi(4k-1)/8;\ \pi(4k+1)/16,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

2. 90%. *Указание.* Пусть x, y, z — расход горючего при полете в метеоусловиях A, $Б$ и $В$ соответственно, а S — нормативный расход.

Тогда

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=\frac{305}{300}s,\\\frac{x}{4}+\frac{3z}{4}=\frac{925}{1000}s,\\\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=\frac{975}{1000}s.\end{cases}$$

Из этой системы мы должны найти $(z/s)100$.

3. 0. *Указание.* Выполните замену $t=3^{x/2}, t\ne 9$, а затем решите полученное уравнение.

4. $81(\sqrt{3}-1)/2$. *Указание.* Пусть $\angle DO_1N=2\alpha$, $\angle CO_2M=2\beta$, $PN=x$ (рис. 12). Записывая отношение площадей, получим $\sin^2\beta=\sqrt{3}\sin 2\alpha$. Из теоремы синусов следует, что $\sin\alpha/\sin\beta=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Из этих соотношений находим:

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

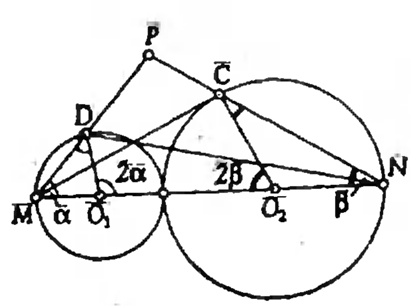


Рисунок 12

$\sin\beta = 1/2,\ \cos\beta = \sqrt{3}/2.$

Кроме того, $PM\cos\alpha + PN\cos\beta = 18$, что дает возможность найти x, а затем и площадь треугольника MNP.

5. $(-\infty; 5/3)$. *Указание.* Данное неравенство преобразуется к виду

$$a < \frac{5}{3} + \left(\sqrt{\frac{3}{3x+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Правая часть оптимальна и равна 5/3, когда выражение в скобках равно нулю, т.е. при $x = 8/3 \in [1;6]$.

Вариант 7

1. 184. **2.** $\left[\frac{\sqrt{2}-1}{3}; +\infty\right)$.

3. $\left\{\frac{1}{7}; 7^{(-3-\sqrt{2})/7}; 7^{(\sqrt{2}-3)/7}\right\}$.

4. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{5} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **5.** $155\sqrt{3}/84$.

6. $(1; 513/2; 128), (-1; -513/2; -128)$.

Указание. Докажите, что в области допустимых значений левая часть уравнения неотрицательна, а правая — неположительна. Следовательно, обе они должны быть равны нулю.

Вариант 8

1. $\pi(2k+1),\ k \in \mathbf{Z}$. **2.** $a = 2, b = -8, c = 8$.

3. $[1/81; 0) \cup [3; +\infty)$.

4. 60. *Указание.* Пусть $S_{ABC} = S$. Из условия сразу следует, что $AB = BD$, $AF = FD$ (рис. 13). Поэтому $S_{ABE} = S_{BDE} = S_{DCE} = S/3$, но
$S_{AFE} = S_{DFE} = 5$, $S_{ABF} = x/4$,
$S_{ABF} + S_{AEF} = S_{ABE}$,

т.е. $\frac{x}{4} + 5 = \frac{x}{3}$, откуда $x = 60$.

5. 4; 19/4. *Указание.* При $x < 0$ и $x \ge 2$ получаем уравнение $x^2 - x + 2 - c = 0$, имеющее один корень, принадлежащий указанному множеству при $0 < c < 4$, и два корня при $c \ge 4$.

При $0 \le x < 1$ приходим к уравнению

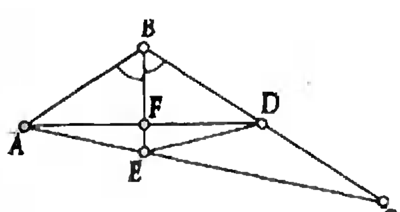


Рисунок 13

$x^2 - 3x - 2 + c = 0$, имеющему в указанном промежутке один корень при $-2 < c \le 2$ и не имеющему корней, принадлежащих множеству $0 \le x < 1$, при остальных c.

При $1 \le x < 2$ получаем уравнение $3x^2 - 9x + c + 2 = 0$. Его корни в нужном промежутке: при $c = 19/4$ — один корень и при $4 < c < 19/4$ — два корня, при остальных c все корни вне множества $1 \le x < 2$. Осталось подвести итог.

Вариант 9

1. 1. **2.** $x = -1,\ 2 \le x < 5$.

3. 133 и 54. *Решение.* Пусть x — число рабочих в первой бригаде, а $2p$ — количество деталей первого типа, которое один рабочий делает за единицу времени. Тогда $187 - x$ — численность второй бригады, а $3p$ — количество деталей второго типа, которое один рабочий делает за то же время. Для изготовления деталей первого типа потребуется время
$t_1(x) = 5000/(2px)$, для изготовления деталей второго типа —
$t_2(x) = 3000/(3p(187-x))$. Время $t(x)$ выполнения всего заказа будет равно наибольшему из двух времен t_1 и t_2:
$t(x) = \max(t_1, t_2) = 1000 f(x)/p$, где
$f(x) = \max(5/(2x),\ 1/(187-x))$.
Таким образом, задача сведена к поиску натурального x, $1 \le x \le 186$, доставляющего минимум функции $f(x)$. Минимум функции $f(x)$ на отрезке $[1; 186]$ достигается при

$x_* = 133\frac{4}{7}$, являющемся решением уравнения

$5/(2x) = 1/(187-x)$.

Поскольку x_* не целое число, а функция $f(x)$ убывает на промежутке $[1; x_*]$ и возрастает на промежутке $[x_*; 186]$, остается сравнить значения функции $f(x)$ в двух соседних с x_* целочисленных точках $x_1 = 133$ и $x_2 = 134$ и убедиться в том, что $f(133) < f(134)$.

4. $2\pi/3$. *Указание.* Продолжите ребра LK и NK за вершину K и найдите смежный с искомым плоский угол с вершиной K и стороной KM.

5. 1. *Указание.* Пусть $QL = l$, $QM = m$, $QK = k$, $QN = n$, $\angle KQN = 2\alpha$, $PQ = x$. Опустим перпендикуляры LL_1 и MM_1 на прямую PQ (рис. 14). Треугольники LL_1P и MM_1P подобны, поэтому

$$\frac{l\cos\alpha}{m\cos\alpha} = \frac{x + l\sin\alpha}{x - m\sin\alpha}.$$

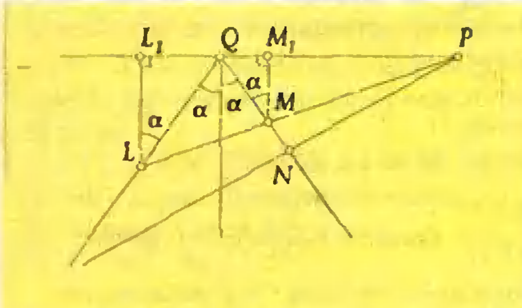


Рисунок 14

Отсюда имеем $\dfrac{2lm}{l-m}=\dfrac{x}{\sin\alpha}$, (*)

аналогично

$\dfrac{2kn}{k-n}=\dfrac{x}{\sin\alpha}$. (**)

Условие равенства площадей треугольника LQM и четырехугольника $KLMN$ запишем в виде $kn - lm = lm$ и учтем, что $k = 6$, $n = 4$. Отсюда и из (*), (**) находим $m = 3$ и $MN = n - m = 1$.

6. $b = 4$; $9/4 \le b \le 5/2$. *Решение.* Изобразим на плоскости (x,b) множество точек, удовлетворяющих данному неравенству. При этом удобно, раскрывая модуль, перейти от неравенства к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} b \ge -x, \\ b \le -(x-3)^2/2+9/2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b \le -x, \\ b \ge x^2/4. \end{cases}$$

Из рисунка 15 видно, что при любых b целочисленных решений будет не более трех. Ровно три целочисленных решения будет насчитываться при $b = 4$ (это $x = -4, -3, -2$) и при b, удовлетворяющих неравенствам $9/4 \le b \le 5/2$ $(x = -3, -2, -1)$. Здесь нижняя и верхняя границы диапазона изменения b совпадают с ординатами точек пересечения вертикальных прямых $x = -3$ и $x = -1$ с соответствующими параболами.

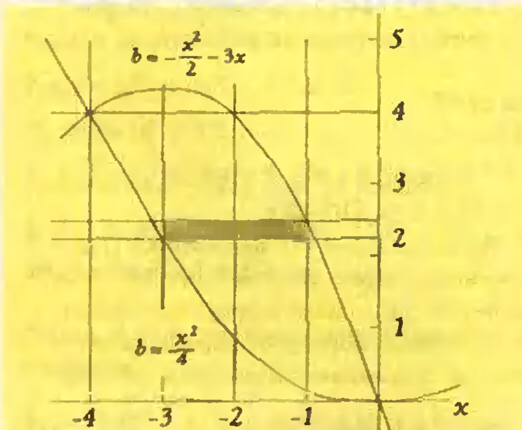


Рисунок 15

Вариант 10

1. $\pi(8k-3)/2$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Переписав неравенство в виде $2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \le \sin x - 3$, заметим, что левая часть его не меньше, а правая — не больше числа -2. Отсюда следует, что оно равносильно системе

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\sin x = 1$.

2. $(8\log_5 2 - 6\log_2 5;\ 8\log_2 5 - 12\log_5 2)$. *Указание.* Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2^{-3x-2y}\cdot 5^{-4x-3y} = 400, \\ 2^{-3x-2y} + 5^{-4x-3y} = 41, \\ 0,5x + 0,4y > 0, \\ 0,5x + 0,4y \ne 1. \end{cases}$$

3. 2. *Решение.* Трапеции $ABCD$ и $ACDE$ имеют не только равные основания, но и общую боковую сторону CD (рис. 16), поэтому они равны. Следовательно, равны дуги BC, DE и дуги AB, CD и AE. Обозначим угловые меры дуг BC и DE через α, а дуг AB, CD и AE через β; кроме того, пусть R — искомый радиус. Тогда

$$2\alpha + 3\beta = 2\pi,\quad DE = 2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$AD = 2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD\cdot DE\sin\frac{\beta}{2} =$$

$$= 2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 1+\sqrt{3}.$$

Поскольку

$$\frac{\pi}{3} = \angle COD = \angle CBO + \angle BCO = \frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2},$$

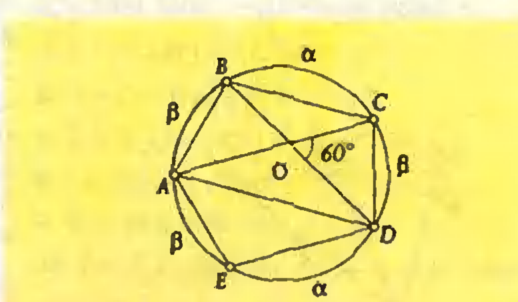


Рисунок 16

то $\beta = \frac{\pi}{3}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $R = 2$.

4. $u = 6$, $v = 4$. *Указание.* Вычитая из первого уравнения второе, убеждаемся, что общие корни этих уравнений являются корнями уравнения $x^2 - 2x = u - v$. (*)

Умножив последнее уравнение на x и вычитая из второго уравнения, получим, что они также удовлетворяют уравнению

$2x^2 + (u - v - 6)x - v = 0$. (**)

Умножив уравнение (*) на 2 и вычитая из уравнения (**), получим, что линейное уравнение $(u - v - 2)x + 2u - 3v = 0$ имеет 2 различных корня. Это возможно лишь тогда, когда $u - v = 2$, $2u = 3v$.

5. $3\sqrt{3}$. *Решение.* Рассмотрим проекцию тетраэдра на плоскость, перпендикулярную XY (рис. 17). Пусть точка H' — проекция точек

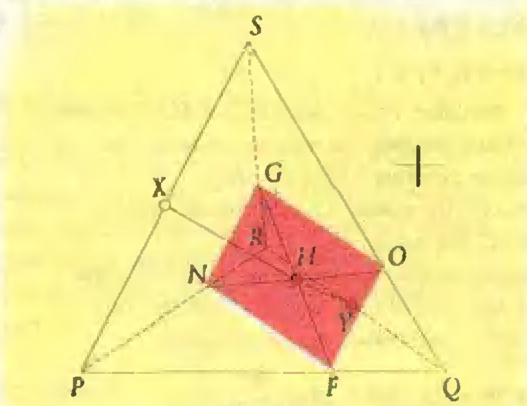


Рисунок 17

X, H, Y, точка P' — проекция точки P, точка Q' — точки Q и т.д. Так как X — середина PS, а Y — середина RQ, то H' — середина $R'Q'$ и $P'S'$, т.е. $P'Q'S'R'$ (рис. 18) — параллелограмм, поэтому середины отрезков $G'F'$ и $O'N'$ совпадают с H'. Отсюда следует, что H — также середина диагоналей GF и ON четырехугольника $FOGN$, т.е. $FOGN$ — параллелограмм. Поэтому $GO \| NF \| RQ$, $GN \| OF \| SP$, и угол между скрещивающимися прямыми PS и RQ равен одному из углов параллелограмма $FOGN$, так

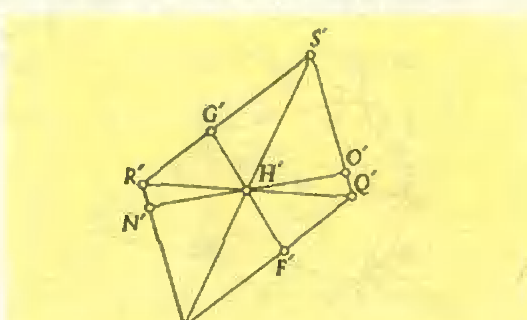


Рисунок 18

что $S_{FOGN} = OF \cdot NF \sin 60°$.

Из подобных треугольников на гранях тетраэдра находим $NF = 3$, $FO = 2$.

Вариант 11

1. $\pi(6k - 1)/6$, $k \in Z$. **2.** $[1; 7/2]$.

3. $\frac{8}{5}\sqrt{\frac{7}{19}}$. *Указание.* Пусть PQ — отрезок, проходящий через точку C и перпендикулярный сторонам LM и KN, а $MC = a$ (рис. 19). Выразите через a отрезки CQ, KQ, CP, LP и найдите тангенсы и косинусы нужных углов.

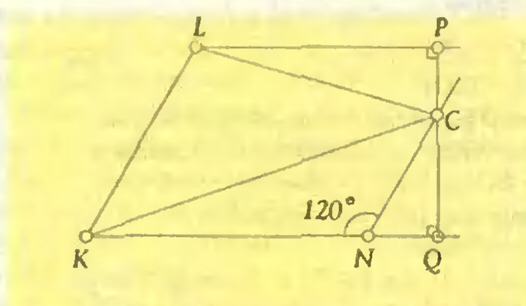


Рисунок 19

4. 30 км/ч.

5. 0; $\pm 2\sqrt{2}$. *Указание.* Данная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} bu^2 + v + 2b = 0, \\ bv^2 + u + 2b = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

где $u = x + 1$, $v = y - 3$. Если решение данной системы единственно, то единственно и решение этой системы. Заметив, что вместе с парой (u, v) системе (*) удовлетворяет пара (v, u), получаем, что единственное решение должно иметь уравнение $bu^2 + u + 2b = 0$, что возможно либо при $b = 0$, либо когда $D = 1 - 8b^2 = 0$. Осталось проверить, что при $b = 0$ и $b = \pm 1/(2\sqrt{2})$ система (*) действительно имеет единственное решение.

Вариант 12

1. $-2\log_2 3$.

2. $(-1)^k \arcsin 2/3 + \pi k$, $k \in Z$.

3. $(-\infty; 4) \cup (4; 8) \cup [10; +\infty)$.

4. 14. *Указание.* Пусть l — биссектриса угла α, противолежащего стороне длиной 9. Основание биссектрисы делит сторону на отрезки 3 и 6. Записывая теорему косинусов для двух возникших треугольников, получаем систему

$$\begin{cases} 9 = 16 + l^2 - 8l\cos\alpha/2, \\ 36 = 64 + l^2 - 16\cos\alpha/2. \end{cases}$$

из которой без труда находим l.

5. $(-\sqrt{10};-\pi)\cup(-\pi;-3)\cup(3;\pi)\cup(\pi;\sqrt{10})$.

6. $a=-3$, $S=18$. *Указание*. Сумма квадратов корней данного уравнения в силу теоремы Виета равна

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-8a-6$,

причем a должно удовлетворять условию существования корней, т.е.

$D/4=-a^2-4a-3\ge 0$.

Физика

Физический факультет

1. $F>\mu_1 m_1 g+1/2\,\mu_2 m_2 g$.

2. $v=2\sqrt{gl}\sqrt{(2-\sqrt{3})/3}\approx 0{,}6\sqrt{gl}$.

3. $v_m=\sqrt{m/k}\,g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.

4. $T=2\pi\sqrt{2R/g}$. 5. $\eta=1-|\Delta T_2|/\Delta T_1=0{,}5$.

6. $j=AR/(2\rho)$. 7. $v=4mgR/(B^2r^2)$.

8. $Q=C\mathcal{E}_0^2/2$.

9. $$h=\frac{h_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_2-h_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\dfrac{\sin\alpha_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}-\dfrac{\sin\alpha_2}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_2}}}.$$

10. $x_1=-L/3=-5/3$ м; $x_2=L=5$ м.

Механико-математический факультет

1. $v_2=v_1\cos(180^\circ-\alpha)/\cos\beta=52$ км/ч.

2. $\alpha=\arccos(\sqrt{1+2g\Delta h/v_0^2}\,\cos\beta)=45^\circ$.

3. $v=\sqrt{2g(l-h)}\,h/l\approx 1{,}33$ м/с.

4. $T_1=T\dfrac{P}{\rho gV}\left(1+\dfrac{PH}{p_0V}\right)=289{,}8$ К; $t_1=16{,}8$ °С.

5. $\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\right)^2+2}=\sqrt{2}$.

6. $\Delta h=HM/m=20$ см.

7. $U_1'=\mathcal{E}/(1+U_2/U_1)=7{,}2$ В;

$U_2'=\mathcal{E}-U_1'=4{,}8$ В.

8. $R=r(2\sqrt{k}-1)/(2-\sqrt{k})=0{,}8$ Ом.

9. $F=abc/(b-a)^2=90$ см.

10. $d=F\sqrt{k^2-1}=5{,}2$ см.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $s=2\sqrt{R^2+2v^2h/g}\,\sin(vt/(2R))\approx 2$ км.

2. $s_2=s_1(v_3^2-v_2^2)/v_1^2=64$ м.

3. $A=(\mu mg)^2/(2k)=0{,}1$ Дж.

4. $A=M(1+M/m)\mu gs=29{,}4$ Дж.

5. $T_1=T(1-P/(mg))=280$ К; $t_1=7$ °С.

6. $m=\dfrac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1+t_2)}\approx 4{,}8$ кг.

7. $q=\mathcal{E}C(\varepsilon-1)/(2(\varepsilon+1))=10^{-4}$ Кл.

8. $Q=C(\mathcal{E}-U)^2/2=0{,}2$ Дж

9. $\beta=1/2(\pi/2+\varphi+\arcsin(n\sin\alpha))\approx 80^\circ$.

10. $\sin\alpha>\sqrt{n^2-1}\,\sin\beta-\cos\beta=0$.

Химический факультет

1. $x=\dfrac{mg}{k}+\dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{2hk}{mg}}=10$ см.

2. $\Delta h=m/(\rho S)=8{,}3\cdot 10^{-3}$ м.

3. $$\Delta t=\frac{1}{2c}\left(v_0^2\cos^2\alpha+\left(v_0\sin\alpha-\frac{gL}{v_0\cos\alpha}\right)^2\right)=$$

$=0{,}01$ °С.

4. $F=\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\dfrac{Mp_0}{RT}-(m_1+m_2)\right)g=0{,}063$ Н.

5. $V_3=\dfrac{V_1(T_4V_2-T_1V_1)}{T_4V_1+T_1V_2-2T_1V_1}=2{,}2$ м^3.

6. $Q=C\mathcal{E}^2R/(2(r+R))=9\cdot 10^{-5}$ Дж.

7. $k=n^2=4$. 8. $q=2\pi r^2B/R=3{,}14\cdot 10^{-6}$ Кл.

9. $v=\lambda\nu\sin\alpha/\sin\beta=2{,}2$ км/с.

10. $x=3/2\,F=45$ см.

Географический факультет

1. $v_{max}=\sqrt{(P-mg)R/m}\approx 2{,}3$ м/с $\approx 8{,}3$ км/ч.

2. $E_k=m/2(v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2)$,

$E_{k1}=200$ Дж (если $\alpha>0$),

$E_{k2}=600$ Дж (если $\alpha<0$).

3. $Q=m_1v_1^2(1-m_1/m_2)/2=25$ Дж.

4. $h_{max}=(\rho_к SL-m)/(\rho_в S)=7{,}5\cdot 10^{-2}$ м (здесь $\rho_в=1000$ кг/м^3 — плотность воды).

5. $n=pV/(kT)=1{,}8\cdot 10^{14}$ см$^{-3}$.

6. $H=(k-1)p_0/(\rho g)=20{,}4$ м.

7. $T_1=T_2\,p_1/p_2=404$ К, $t_1=131$ °С.

8. $I=Qd/((R+r)\varepsilon_0S)=1$ А.

9. $R_2=9/8\,R_1=90$ Ом.

10. $F=d(d+\Delta d)/(d-\Delta d)=0{,}15$ м (заметим, что $\Delta d<0$).

Новосибирский государственный университет

Физика

Вариант 1

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1383).

2. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1390).

3. Полагая постоянным ускорение a перемычки, по закону Ома для замкнутой цепи в момент времени t имеем
$IR + It/C = Bl(v_0 + at)$. Отсюда при $t = 0$ получаем $v_0 = IR/(Bl)$. Для тока I можно записать $I = \Delta Q/\Delta t = C\Delta\mathcal{E}/\Delta t = BlCa$ (откуда, в частности, видно, что при $I = \mathrm{const}$ и $a = \mathrm{const}$). Согласно второму закону Ньютона, $ma = mg - IBl$. Таким образом,
$v_0 = RCmg/(m + B^2l^2C)$.

4. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1394).

5. При малом угле наклона плоскости сила, прижимающая к ней цилиндр, заметно больше силы, прижимающей цилиндр к цилиндру. В результате между цилиндрами возникает проскальзывание, а между плоскостью и цилиндром — нет. Поэтому нижний цилиндр в этом случае не слишком мешает верхнему скатываться вращаясь. При большом угле наклона прижимающая сила между цилиндрами больше, и верхний цилиндр просто соскальзывает по плоскости. Критический угол наклона равен $45°$.

Вариант 2

1. $p_a = \rho g(H_1h_1 - H_2h_2)/(h_1 - h_2)$.

2. Без нажима $ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. При нажиме $ma_1 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - 2\mu N$. Отсюда $a_1 = a - 2\mu N/m$ при $a > 2\mu N/m$ и $a_1 = 0$ при $a \le 2\mu N/m$.

3. Максимальный ток I_0 достигается, когда ЭДС самоиндукции и, следовательно, напряжение на катушке равны нулю: $U_L = 0$. При этом $U_C = U_R = I_0R$. Соответственно в контуре накапливается энергия
$W_0 = LI_0^2/2 + C(I_0R)^2/2$. При последующих колебаниях тока его максимум I_m вычисляется из закона сохранения энергии $LI_m^2/2 = W_0$. Отсюда $I_m = I_0\sqrt{1 + CR^2/L}$.

4. После того как лед растаял, сила действия на весы изменилась на

$$\Delta F = (m_л g - \rho_{возд} g m_л/\rho_в) - (m_л g - \rho_{возд} g m_л/\rho_л) = m_л g\rho_{возд}(\rho_в - \rho_л)/(\rho_л\rho_в)$$

из-за уменьшения выталкивающей силы. Положив плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_л \approx 0{,}9$ г/см^3, плотность воздуха $\rho_{возд} \sim 10^{-3}$ г/см^3, $m_л = 10^3$ г, получим, что для восстановления равновесия необходимо подлить к литру воды еще $\Delta m \sim 0{,}1$ г.

5. Чтобы изображение «заполнило» весь сосуд, необходимо выполнение условия $\sin\beta = 1/n$, где n — показатель преломления воды (см. рис. 20).

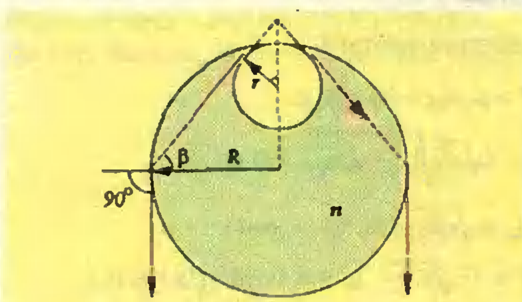


Рисунок 20

Вариант 3

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1387).

2. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1386).

3. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1389).

4. При заданных условиях пар можно считать идеальным газом. Как известно, в объеме $V_0 = 22{,}4$ л при $T_0 = 273$ К и нормальном давлении p_0 содержится $N_A = 6\cdot10^{23}$ молекул. При плотности пара $\rho_п = p_0M_в/(RT) = M_вT_0/(V_0T)$ расстояние между молекулами пара

$$r_п \sim \left(\frac{M_в}{\rho_пN_A}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{TV_0}{N_AT_0}\right)^{1/3}.$$

Для воды это расстояние $r_в \sim \left(\dfrac{M_в}{\rho_вN_A}\right)^{1/3}$.

Таким образом, увеличение расстояний

$\dfrac{r_п}{r_в} \sim \left(\dfrac{TV_0\rho_в}{T_0M_в}\right)$. При $T = 373$ К, $\rho_в = 1$ г/см^3 и $M_в = 18$ г/моль $r_п/r_в \sim 10$.

5. Параллельное подключение конденсатора к диоду позволяет переменному току проходить через лампу в течение полупериода, неиспользуемого при отключенном конденсаторе. Поэтому лампа разогревается и светит сильнее.

ОЛИМПИАДЫ

XXXIII Международная математическая олимпиада

1. (3; 5; 15), (2; 4; 8). *Решение.*

Пусть $x = a - 1$, $y = b - 1$, $z = c - 1$, тогда

$$A = \frac{abc - 1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{(x+1)(y+1)(z+1) - 1}{xyz} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy},$$

откуда видно, что $A > 1$ и что A — убывающая функция каждого из своих аргументов a, b, c, больших единицы.

Если $a \ge 4$, то $b \ge 5$, $c \ge 6$ и

$$A \le \frac{4\cdot5\cdot6 - 1}{3\cdot4\cdot5} = \frac{119}{60} < 2,$$

так что A не может быть целым.

Если $a = 3$, то $b \ge 4$, $c \ge 5$ и

$$A \le \frac{3\cdot4\cdot5 - 1}{2\cdot3\cdot4} = \frac{59}{24} < 3,$$

откуда

$A = 2$, т.е. $3bc - 1 = 2\cdot2(b-1)(c-1)$. Записав это равенство в виде $(b-4)(c-4)=11$ и учитывая, что $3 < b < c$, получаем $b - 4 = 1$, $c - 4 = 11$, т.е. $b = 5$, $c = 15$.

Если же $a = 2$, то $b \ge 3$, $c \ge 4$ и $A \ge 23/6 < 4$.

Из равенства $A = 2$, т.е. $2bc - 1 = 2\cdot1(b-1)(c-1)$, следует равенство $2(b + c) = 3$, что невозможно. А из равенства $A = 3$, т.е. $2bc - 1 = 3\cdot1(b-1)(c-1)$, получаем $(b-3)(c-3) = 5$, откуда $b - 3 = 1$, $c - 3 = 5$, т.е. $b = 4$, $c = 8$.

2. $f(x) = x$. *Решение.* Пусть $f(0) = c$. Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим

$$f(f(y)) = y + c^2 \qquad (1)$$

для любого $y \in \mathbf{R}$. Подставив в (1) $y = -c^2$, получим $f(\alpha_0) = 0$, где $\alpha_0 = f(-c^2)$. Из равенства $f(f(x^2 + f(y))) = f(y + f^2(x))$ и формулы (1) получаем

$$x^2 + f(y) + c^2 = f(y + f^2(x)). \qquad (2)$$

Пусть α таково, что $f(\alpha) = 0$ (по крайней мере одно такое α существует: $\alpha = \alpha_0$).

Подставив $x = \alpha$ в (2), получим, что $\alpha^2 + c^2 = 0$, откуда $c = \alpha = 0$, т.е. $f(x) = 0$ только при $x = 0$. Из (1) теперь следует, что $f(f(y)) = y$. Подставив $y = 0$ в исходное уравнение, получим $f(x^2) = f^2(x)$, откуда $f(u) = f^2(\sqrt{u}) > 0$ при любом $u > 0$.

Пусть $u > 0$, $v \in \mathbf{R}$. Положив теперь $x = \sqrt{u} > 0$, $y = f(v)$, приходим к равенству $f(u + f(f(v))) = f(v) + f^2(\sqrt{u})$, т.е.

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad (3)$$

при $u > 0$, $v \in \mathbf{R}$.

Допустим, что $x > y$. Тогда из (3) $f(x) = f((x - y) + y) = f(x - y) + f(y) > f(y)$.

Теперь, если $f(x) > x$, то $x = f(f(x)) > f(x)$, а если $f(x) < x$, то $x = f(f(x)) < f(x)$, т.е. $x < f(x)$.

Значит, должно быть $f(x) = x$. Проверка показывает, что функция $f(x) = x$, очевидно, удовлетворяет уравнению.

Решения задач 3 — 6 (задачи М1376 — М1379 «Задачника «Кванта») будут опубликованы позже.

КВАНТ

Главный редактор академик Юрий Осипьян

Первый заместитель главного редактора академик Сергей Новиков

Главный художник Кирилл Ильющенко

Номер подготовили Светлана Давыдова, Андрей Егоров, Анатолий Калинин, Людмила Кардасевич, Сергей Коновалов, Анна Котова, Елена Потапенкова, Анатолий Савин, Валерия Тихомирова, Алексей Черноуцан

Номер оформили Надежда Кузьмина, Станислав Лухин, Александра Хоменко Павел Чернуский, Вадим Юдин

Компьютерная группа Сергей Вакуленко, Вадим Виниченко, Екатерина Титова

Заведующая редакцией Людмила Винюкова

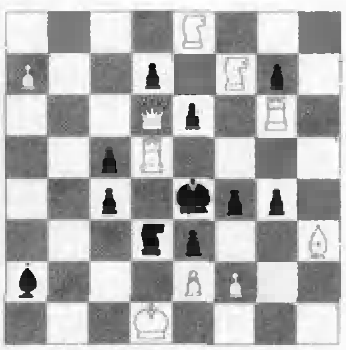
Адрес редакции 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Типография Чеховский полиграфический комбинат

КОРОЛЬ В КЛЕТКЕ

Задача, с которой мы начнем нашу сегодняшнюю страничку, — одна из самых знаменитых в изобразительных шахматах (в этом жанре композиции начальное или конечное положения на доске представляют собой какую-нибудь букву, математическую фигуру и т.д.).

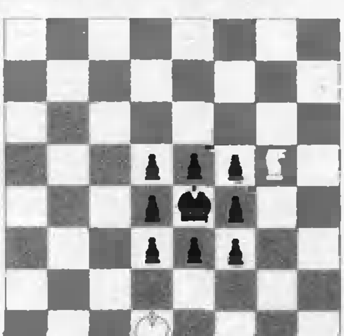
В начале XV века полчища Тимура в битве при Анкоре разбивают и берут в плен турецкого султана Баязета, который по преданию был заключен в клетку. Этому событию и была посвящена задача К.Яниша.



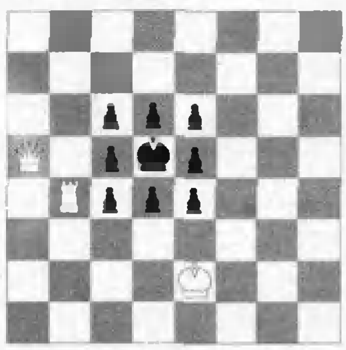
К.Яниш

Белые дают мат ровно в 10 ходов, не забирая ни одной пешки

1. f3+ gf 2. ed+ cd 3. Cf5+ ef 4. Лd4+ cd 5. a8C+ Cd5 6. Лe6+ de 7. C:d5+ ed 8. Kf6+ gf 9. Фe5+ fe 10.Kg5X



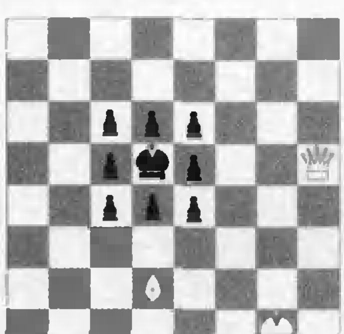
Финальная позиция весьма привлекательна — король получает мат, находясь в своеобразной клетке, построенной из черных пешек. В дальнейшем шахматные композиторы часто брали за основу «клетку» Яниша, у которой оказалась счастливая судьба. В предлагаемых задачах черная клетка одна и та же, но штурм ее требует различных подходов, ведь ферзя всякий раз сопровождают разные фигуры.



Я.Иесперсен

Мат в 4 хода

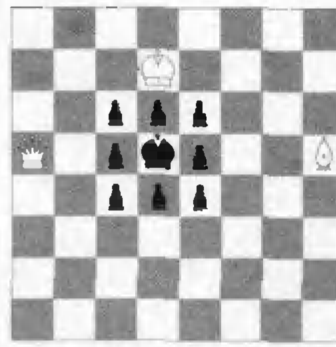
1. Фa1! d3+ 2. Крe3 d2 3. Лb5! Необычная позиция цугцванга. 3...c3 4. Фa2X, 3...d1Ф 4. Ф:d1X, 3...cb 4. Фa8X. Другие варианты менее интересны: 1...e3 2. Фh1+ e4 3. Фh5+ e5 4. Фf7X, 1...c3 2. Фa2+ c4 3. Фa5+ c5 4. Фa8X.



А.Келлер

Мат в 4 хода

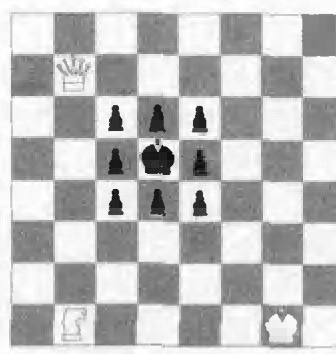
Здесь возникает красивый цугцванг после **1. Cc3!** Если **1...d3**, то **2. Фh1! d2 3. Крh2! d1Ф 4. Ф:d1X** 1...e3 2. *Фh1+ e4 3. Фh5+*, 1...dc 2. ФdX.



Я.Пит

Мат в 4 хода

Слон другого цвета, и атака клетки идет иначе: **1. Cg6! d3 2. Фc3 e3 3. C:d3 e2 4. Ф:c4X**, 3...cd 4. Ф:d3X, 1...e3 2. Фc7 c3 3. Cd3 и 4. *Ф:d6X, 1...c3 2. Фa2+ и т. д.*



Я.Пит

Мат в 4 хода

Что нового может дать конь? Наиболее интересен такой вариант: **1.Фb2! d3 2. Kc3+ Крd4 3. Kb5+ Крd5 4. Kc7X**, 3...Крe3 4. Фf2X.

Евгений Гик

Топологические головоломки

Сегодня мы публикуем новые оригинальные головоломки болгарского математика Д.Вокарелова. Название «топологические» им дал знаменитый американский писатель Мартин Гарднер, автор всемирно известных книг по занимательной математике.

А до этого подобные игрушки назывались просто шнурковыми. Задача у них одна — освободить веревочную петлю из проволочной конструкции.

Представленные здесь головоломки легко изготовить из медной или алюминиевой проволоки, а решить их будет очень не просто. Попробуйте найти разгадку хотя бы самой простой с виду головоломки, и вы убедитесь в этом сами. В одном из следующих номеров мы напечатаем статью самого изобретателя Димитра Вокарелова. В ней будут раскрыты секреты решения и показана связь забавных игрушек с серьезной наукой топологией.